考研数学高等数学电子教材

主讲：汪诚义

序言

我们讲义共写了八章，数学一的考生全部要学，而其它考生只需要其中的一部分。根据共同需要的内容先讲的原则，讲课内容与顺序安排如下：

第一章　函数、极限、连续　　（全体）
第二章　一元函数微分学　　（全体）
第三章　一元函数积分学　　（全体）
第六章　多元函数微分学　　（全体）
第七章　§7.1 二重积分　　（全体）
第四章　§4.1　一阶微分方程
　　　　§4.3　微分方程的应用
（数学四考生结束）
　　　　§4.2　高阶微分方程
（数学二考生结束）
第八章　无穷级数
（数学三考生结束）
第五章　向量代数与空间解析几何
第七章　§7.2　三重积分
　　　　§7.3　曲线积分
　　　　§7.4　曲面积分
数学一全部内容结束

第一章　函数、极限、连续

§1.1　函数

（甲）　内容要点

一、函数的概念

1.　定义

$y = f(x)$，　$x \in I$

x 为自变量，y 为因变量或称为函数值

$f: x \to y$　　为对应关系

自变量在定义域里面取值的时候，所有的函数值的全体就称为值域。

口诀（1）：函数概念五要素；对应关系最核心。

2.　分段函数（考研中用得很多）

例 1：　$f(x) = \begin{cases} x^2 & ,x<1 \\ 3x+1, & x \geq 1 \end{cases}$

例 2：$|x|=\begin{cases} x & ,x\ge 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases}$

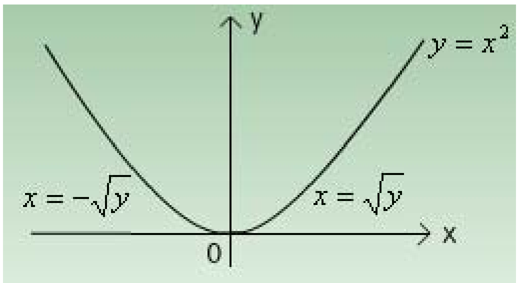
例 3：$\max(x,x^2,x^3)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 0 \\ x & ,0<x\le 1 \\ x^3 & ,x>1 \end{cases}$

口诀（2）：分段函数分段点；左右运算要先行。

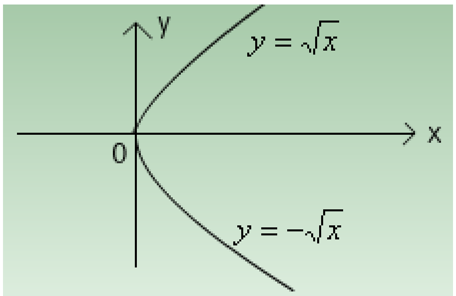
3．反函数

例：$y=x^2$ 的反函数 $x=\pm\sqrt{y}$

由于不单值，所以要看作 $x=\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$，它们的图像与 $y=x^2$ 一致。



如果改变符号，写成 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$，那么它们的图像要变。



4．隐函数

$F(x,y)=0$ 确定 y 与 x 的函数关系

有些隐函数能化为显函数，例：$x^2+y^2=1$，$y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$。

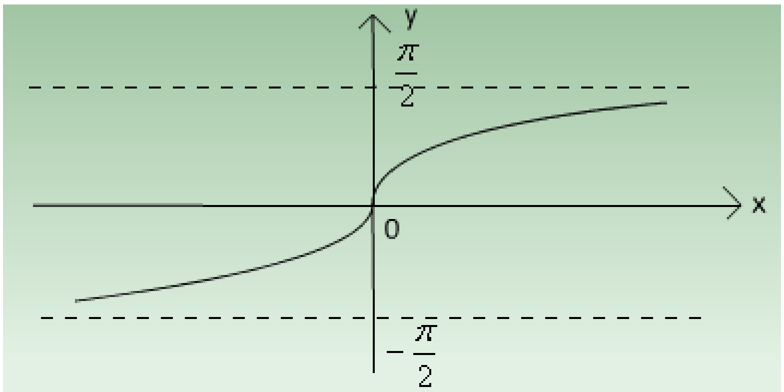
另外有些隐函数则不能化为显函数。例：$e^{x+y}+\sin(3x-2y)+5=0$

二、基本初等函数的概念、性质和图像

（内容自己复习参考书，这里仅举例说明其重要性）

例 1：考察 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ (x\to\infty)}}\arctan x$

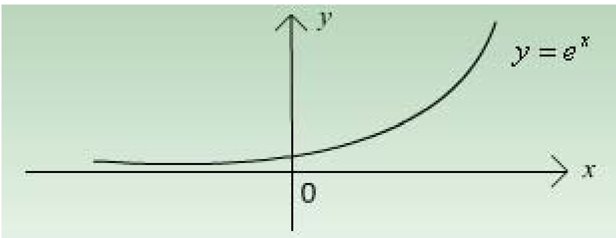
$y=\arctan x$ 的图像



例 2：考察$\lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}}$

因为$\lim\limits_{x\to0}(-\frac{1}{x^2}) = -\infty$

指数函数$y=e^x$的图像



因此$\lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

三、复合函数与初等函数

1. 复合函数

（i）已知 $f(x)$， $g(x)$，求 $f[g(x)]$

（ii）已知 $f[g(x)]$， $g(x)$，求 $f(x)$

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或复合运算用一个表达式表示的函数

原则上来说，分段函数不是初等函数

四、考研数学中常出现的非初等函数

1．用极限表示的函数

（1） $y=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

（2） $y=\lim\limits_{t\to x} f(t,x)$

2．用变上、下限积分表示的函数

（1） $y=F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 其中 $f(t)$连续，则$\frac{dy}{dx}=f(x)$

（2） $y=G(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$ 其中$\varphi_1(x)$， $\varphi_2(x)$可导， $f(t)$连续，

则$\frac{dy}{dx}=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$

口诀（3）：变限积分是函数；出现之后先求导。

五、函数的几种性质

1．有界性：

（i）定义：设函数 $y=f(x)$ 在 X 内有定义，若存在正数 M，使 $x\in X$ 都有 $|f(x)|\le M$，则称 $f(x)$ 在 X 上是有界的。

（ii）例：$f(x)=\frac{1}{x}$ 在（0，1）内无界，在（1/2，1）内有界

2．奇偶性：

（i）定义：设区间 X 关于原点对称，若对 $x\in X$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 在 X 上是奇函数。

若对 $x\in X$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 X 上是偶函数。

（ii）图像对称性：奇函数的图象关于原点对称；偶函数图象关于 y 轴对称。

常用公式：$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}0 & \text{当f为奇函数}\\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{当f为偶函数}\end{cases}$

口诀（4）：奇偶函数常遇到；对称性质不可忘。

3．单调性：

（i）定义：设 $f(x)$ 在 X 上有定义，若对任意 $x_1\in X$，$x_2\in X$，$x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)[f(x_1)>f(x_2)]$ 则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加的[单调减少的]；若对任意 $x_1\in X$，$x_2\in X$，$x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)\le f(x_2)[f(x_1)\ge f(x_2)]$，则称 $f(x)$ 在 X 上是单调不减[单调不增]

（注意：有些书上把这里单调增加称为严格单调增加；把这里单调不减称为单调增加。）

（ii）判别方法：在（a，b）内，若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调增加；若 $f'(x)<0$，则单调减少。

口诀（5）：单调增加与减少；先算导数正与负。

4．周期性：

（i）定义：设 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 $T\neq 0$，使得任意 $x\in X$，$x+T\in X$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期。

由此可见，周期函数有无穷多个周期，一般我们把其中最小正周期称为周期。

（ii）例：$f(x)=\sin\lambda x(\lambda>0)$ 周期为 $T=\frac{2\pi}{\lambda}$；$f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}$ 周期为 12π 是 4π 和 6π 的最小公倍数；$f(x)=\sin\pi x+\sin 2x$ 不是周期函数，因为 2 和 π 没有最小公倍数。

（乙）典型例题

一、定义域与值域

例 1．设 $f(x)$ 的定义域为 $[-a,a](a>0)$ 求 $f(x^2-1)$ 的定义域

解：要求$-a\le x^2-1\le a$，则$1-a\le x^2\le x^2\le 1+a$，

当$a\ge 1$时，$\because 1-a\le 0$，$\therefore x^2\le 1+a$，则$|x|\le\sqrt{1+a}$

当$0<a<1$时，$1-a>0$，$\therefore \sqrt{1-a}\le|x|\le\sqrt{1+a}$

也即$\sqrt{1-a}\le x\le\sqrt{1+a}$或$-\sqrt{1+a}\le x\le-\sqrt{1-a}$

例 2．求$y=f(x)=\begin{cases}3-x^3,x<-2\\5-x,-2\le x\le 2\\1-(x-2)^2,x>2\end{cases}$ 的值域，并求它的反函数。

解：$x<-2$，$y>3+8=11$，$x=\sqrt[3]{3-y}$，

$-2\le x\le 2$，$3\le y=5-x\le 7$，$x=5-y$，

$x>2$，$y=1-(x-2)^2<1$，$x=2+\sqrt{1-y}$，

所以$y=f(x)$的值域为$(-\infty,1)\cup[3,7]\cup(11,+\infty)$

反函数$x=\begin{cases}2+\sqrt{1-y},y<1\\5-y,3\le y\le 7\\\sqrt[3]{3-y},y>11\end{cases}$

二、求复合函数有关表达式

例 1．设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求$\underbrace{f[f(\cdots f(x))]}_{n\text{重复合}}=f_n(x)$

解：$f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big/\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}=\dfrac{x}{1+2x^2}$，

若$f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，

则$f_{k+1}(x)=\dfrac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\Big/\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$

根据数学归纳法可知，对正整数n，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

例 2．已知$f'(e^x)=xe^{-x}$，且$f(1)=0$，求$f(x)$

解：令$e^x=t$，$x=\ln t$，因此$f'(e^x)=f'(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，

$$f(x)-f(1)=\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt=\frac{1}{2}\ln^2 t\Big|_1^x=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

$\because\ f(1)=0$，$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$

三、有关四种性质

例 1．设 $F'(x)=f(x)$，则下列结论正确的是　　　　　　　　　　（　　）

（A）若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为偶函数

（B）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 为奇函数

（C）若 $f(x)$ 为周期函数，则 $F(x)$ 为周期函数

（D）若 $f(x)$ 为单调函数，则 $F(x)$ 为单调函数

解：（B）的反例 $f(x)=3x^2$；$F(x)=x^3+1$；（C）的反例 $f(x)=\cos x+1$;

$F(x)=\sin x+x$； (D)的反例 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)=2x$；$F(x)=x^2$

（A） 的证明：

$F(x)-F(0)=\int_0^x f(t)dt \qquad F(x)=F(0)+\int_0^x f(t)dt \qquad F(-x)=F(0)+\int_0^{-x} f(t)dt$

作变量替换 $u=-t$

则 $F(-x)=F(0)+\int_0^x f(-u)d(-u)$

$\because\ f$ 为奇函数，$\therefore\ f(-u)=-f(u)$

于是 $F(-x)=F(0)+\int_0^x f(u)du=F(x)$

$\therefore F(x)$ 为偶函数

例 2．求 $I=\int_{-1}^{1} x\left[x^5+\left(e^x-e^{-x}\right)\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]dx$

解：$f_1(x)=e^x-e^{-x}$ 是奇函数，

$\because\ f_1(-x)=e^{-x}-e^x=-f_1(x)$

$f_2(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数，

$$\begin{aligned}\because\ f_2(-x)&=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\\&=\ln\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=\ln 1-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\&=-f_2(x)\end{aligned}$$

因此 $x\left(e^x-e^{-x}\right)\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数

于是 $I=\int_{-1}^{1}x^6dx+0=2\int_0^1 x^6dx=\frac{2}{7}$

例 3．设 $f(x)$，$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，下列结论成立的是 （ ）

（A） $f(x)g(b)>f(b)g(x)$ （B） $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

（C） $f(x)g(x)>f(b)g(b)$ （D） $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

解：（A）等价 $\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}$，只需 $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ 单调减少；

（B）等价 $\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(a)}{g(a)}$，只需 $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ 单调增加；

（C）只需 $[f(x)g(x)]$ 单调减少

（D）只需 $[f(x)g(x)]$ 单调增加

现在 $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$，所以 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 单调减少，故（A）成立。

四、函数方程

例 1．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，反函数为 $g(x)$，且 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$，求 $f(x)$。

解：两边对 x 求导得 $g[f(x)]f'(x)=2xe^x+x^2e^x$，于是 $xf'(x)=x(2+x)e^x$，故 $f'(x)=(x+2)e^x$，

$f(x)=(x+1)e^x+C$，由 $f(0)=0$，得 $C=-1$，则 $f(x)=(x+1)e^x-1$。

口诀（6）：正反函数连续用；最后只留原变量。

例 2．设 $f(x)$ 满足 $\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f\left(\frac{1}{3}x\right)=x$，求 $f(x)$

解：令 $g(x)=\sin f(x)$，则

$g(x)-\frac{1}{3}g\left(\frac{1}{3}x\right)=x$，

$\frac{1}{3}g\left(\frac{1}{3}x\right)-\frac{1}{3^2}g\left(\frac{1}{3^2}x\right)=\frac{1}{3^2}x$，

$\frac{1}{3^2}g\left(\frac{1}{3^2}x\right)-\frac{1}{3^3}g\left(\frac{1}{3^3}x\right)=\frac{1}{3^4}x$，

……

$$\frac{1}{3^{n-1}} g\left(\frac{1}{3^{n-1}} x\right)-\frac{1}{3^{n}} g\left(\frac{1}{3^{n}} x\right)=\frac{1}{3^{2(n-1)}} x，$$

各式相加，得 $g(x)-\frac{1}{3^{n}} g\left(\frac{1}{3^{n}} x\right)=x\left[1+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{9^{n-1}}\right]$

$\because |g(x)| \leq 1$，$\therefore \lim\limits_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n}} g\left(\frac{1}{3^{n}} x\right)=0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty}\left[1+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{9^{n-1}}\right]=\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}$$

因此 $g(x)=\frac{9}{8} x$，于是

$f(x)=\arcsin \frac{9}{8} x+2 k \pi$ 或 $(2 k+1) \pi-\arcsin \frac{9}{8} x$（$k$ 为整数）

口诀（7）：一步不行接力棒；最终处理见分晓。

思考题

设 $b>a$ 均为常数，求方程

$\sin (x+b) \ln \left[(x+b)+\sqrt{(x+b)^{2}+1}\right]-\sin (x+a) \ln \left[(x+a)+\sqrt{(x+a)^{2}+1}\right]=0$ 的一个解。

解：令 $f(t)=\sin t \ln \left|t+\sqrt{t^{2}+1}\right|$，则原方程相当于 $f(x+b)=f(x+a)$，而 $\sin t$ 和 $\ln \left|t+\sqrt{t^{2}+1}\right|$ 都是奇函数，故 $f(t)$ 为偶函数，于是只要 $(x+b)=-(x+a)$，$\therefore x=-\frac{1}{2}(b+a)$

§ 1.2　极限

（甲）内容要点

一、极限的概念与基本性质

1．极限的概念

（1）数列的极限 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} x_{n}=A$

（2）函数的极限 $\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} f(x)=A$；$\lim\limits_{x \rightarrow-\infty} f(x)=A$；$\lim\limits_{x \rightarrow \infty} f(x)=A$

$\lim\limits_{x \rightarrow x_{0}} f(x)=A$；$\lim\limits_{x \rightarrow x_{0}^{+}} f(x)=A$；$\lim\limits_{x \rightarrow x_{0}^{-}} f(x)=A$

2．极限的基本性质

定理 1　（极限的唯一性）设 $\lim f(x)=A$，$\lim f(x)=B$，则 $A=B$

定理 2　（极限的不等式性质）设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$

若 x 变化一定以后，总有 $f(x) \geq g(x)$，则 $A \geq B$

反之，$A>B$，则 x 变化一定以后，有 $f(x)>g(x)$（注：当 $g(x)\equiv 0$，$B=0$ 情形也称为极限的保号性）

定理 3 （极限的局部有界性）设 $\lim f(x)=A$

则当 x 变化一定以后，$f(x)$ 是有界的。

定理 4 设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$

则（1）$\lim\left[f(x)+g(x)\right]=A+B$

（2）$\lim\left[f(x)-g(x)\right]=A-B$

（3）$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B$

（4）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$

（5）$\lim\left[f(x)\right]^{g(x)}=A^{B}\ (A>0)$

二、无穷小

1．无穷小定义：若 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为无穷小（注：无穷小与 x 的变化过程有关，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，当 $x\to\infty$ 时 $\dfrac{1}{x}$ 为无穷小，而 $x\to x_0$ 或其它时，$\dfrac{1}{x}$ 不是无穷小）

2．无穷大定义：任给 $M>0$，当 x 变化一定以后，总有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 为无穷大，记以 $\lim f(x)=\infty$。

3．无穷小与无穷大的关系：在 x 的同一个变化过程中，

若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小，

若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

4．无穷小与极限的关系：

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$

5．两个无穷小的比较

设 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，且 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$

（1）$l=0$，称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，记以 $f(x)=o\left[g(x)\right]$

称 $g(x)$ 是比 $f(x)$ 低阶的无穷小

（2）$l\neq 0$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小。

（3）$l=1$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等阶无穷小，记以 $f(x)\sim g(x)$

6．常见的等价无穷小，当 $x\to 0$ 时

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2$，$e^x-1\sim x$，$\lim(1+x)\sim x$，$(1+x)^a-1\sim ax$。

7．无穷小的重要性质

有界变量乘无穷小仍是无穷小。

口诀（8）：极限为零无穷小；乘有界仍无穷小。

三、求极限的方法

1．利用极限的四则运算和幂指数运算法则

2．两个准则

准则 1：单调有界数列极限一定存在

（1）若 $x_{n+1}\le x_n$（n 为正整数）又 $x_n\ge m$（n 为正整数），则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在，且 $A\ge m$

（2）若 $x_{n+1}\ge x_n$（n 为正整数）又 $x_n\le M$（n 为正整数），则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在，且 $A\le M$

准则 2：夹逼定理

设 $g(x)\le f(x)\le h(x)$。若 $\lim g(x)=A$，$\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$

3．两个重要公式

公式 1：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

公式 2：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$；$\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$；$\lim\limits_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=e$

4．用无穷小重要性质和等价无穷小代换

5．用泰勒公式（比用等价无穷小更深刻）（数学一和数学二）

当 $x\to 0$ 时，$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$ 用 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$（最后一项比 x^3 高阶无穷小）原式

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}$，这样比用洛比达法则简单

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots[a-(n-1)]}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

6．洛必达法则

专门来处理七种比较困难的极限：$\frac{0}{0}$；$\frac{\infty}{\infty}$；$0*\infty$；$\infty-\infty$；1^{∞}；0^0；∞^0

第一层次：直接用洛比达法则可处理$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$两种

法则 1：（$\frac{0}{0}$型）设（1）$\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$

（2）x变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$皆存在

（3）$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$）

则$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$（或∞）

（注：如果$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在且不是无穷大量情形，则不能得出$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$不存在且不是无穷大量情形）

法则 2：（$\frac{\infty}{\infty}$型）设（1）$\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$

（2）x变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$皆存在

（3）$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$）

则$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$（或∞）

例：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

方法一：等价无穷小替换 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

方法二：洛比达法则　分子分母求导得$\frac{\sin x}{2x}$，然后可以用公式一。

第二层次：间接用洛比达法则可处理$0*\infty$和$\infty-\infty$

例 1：$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$

例 2：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$ 化为$\frac{0}{0}$型

第三层次：再间接用洛比达法则可处理1^{∞}；0^0；∞^0型，都是$\lim[f(x)]^{g(x)}$形式

口诀（9）：幂指函数最复杂；指数对数一起上。

常用技巧：$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，这样$\lim g(x)\ln f(x)$是$0*\infty$型，可按第二层次来处理。

例 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}=e^0=1$

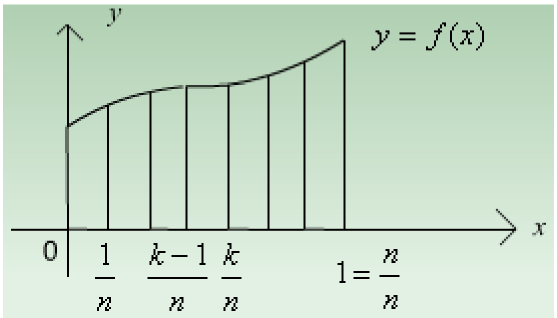
口诀（10）：待定极限七类型；分层处理洛比达。

7．利用导数定义求极限

基本公式：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$ [如果存在]

8．利用定积分定义求极限

基本公式：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$ [如果存在]



口诀（12）：数列极限逢绝境；转化积分见光明。

口诀（11）：数列极限洛比达；必须转化连续型。

9．其它综合方法

10．求极限的反问题有关方法

例：已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$，求 a 和 b。

（乙） **典型例题**

补充题型（关于无穷小）

例 1：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{3n+1}\sin\sqrt{n^2+n+1}=0$（无穷小量乘有界变量仍是无穷小量）

例 2:：设当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶无穷小；而$x\sin x^n$又是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小，则 n=　　　　（　　）

（A）　1　　　（B）　2　　　（C）　3　　　(D)　4

解：当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x^4$　$x\sin x^n\sim x^{n+1}$　$e^{x^2}-1\sim x^2$

由$4>n+1>2$可知$n+1=3$，故$n=2$　选（B）

一、通过各种基本技巧化简后直接求出极限

例 1．设$a_m\neq 0$，$b_n\neq 0$，求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots a_1 x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots b_1 x+b_0}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1 x + b_0}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m-n}\left[a_m + a_{m-1}x^{-1}+\cdots+a_1 x^{1-m}+a_0 x^{-m}\right]}{b_n + b_{n-1}x^{-1}+\cdots+b_1 x^{1-n}+b_0 x^{-n}}$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当}m<n\text{时}\\ \dfrac{a_m}{b_n}, & \text{当}m=n\text{时}\\ \infty & \text{当}m>n\text{时}\end{cases}$$

口诀（13）：无穷大比无穷大；最高阶项除上下。

例 2．设 $a\neq 0$，$|r|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+ar+\cdots+ar^{n-1}\right)$

解：$\because 1-r^n=(1-r)(1+r+r^2+...+r^{n-1})$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(a+ar+\cdots+ar^{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}a\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

特例　（1）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

解：

例 2 中取 $a=\frac{2}{3}$，$r=-\frac{2}{3}$，可知原式 $=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\dfrac{2}{5}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\dfrac{2}{\frac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}$

例 3．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^n}{2^{n+1}+3^n}$

解：

分子、分母用 3^n 除之，

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3$

或分子分母用 3^{n+1} 除之，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n}{(\frac{2}{3})^{n+1}+\frac{1}{3}}=3$

（注：主要用当 $|r|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$）

例 4. 设l是正整数，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+l)}$

解：

例如$l=2$时，$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\frac{1}{n(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$$

$$\because \frac{1}{k(k+l)}=\frac{1}{l}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{l}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{l}-\frac{1}{n+1}-\cdots-\frac{1}{n+l}\right]$$

因此原式$=\frac{1}{l}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{l}\right)$

特列：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1 \qquad (l=1)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4} \qquad (l=2)$

二、用两个重要公式

例 1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

解：

当$x=0$，原式$=1$

当$x\neq 0$时，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin x}{x}$$

例 2．求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

解一：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-1)/x}{(x+1)/x}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$$

解二：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\left(\frac{x+1}{-2}\right)\left(\frac{-2x}{x+1}\right)}=e^{-2}$$

例 3．$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\cot^2 x}$ $=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\left(-\sin^2 x\right)\right]^{\frac{1}{\left(-\sin^2 x\right)}\cdot\frac{\cos^2 x}{(-2)}}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}$$

三、用夹逼定理求极限

例 1．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)$

解：

令 $x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$，

$y_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$，

则 $0<x_n<y_n$，于是 $0<x_n^2<x_ny_n=\frac{1}{2n+1}$

由夹逼定理可知：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=0$，于是原极限为 0

例 2．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$

口诀（14）:n 项相加先合并；不行估计上下界。

解：

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+2)}=\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$$

由夹逼定理可知 $\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\frac{1}{2}$

例 3．求 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|dt$

解：

$$\because \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|dt=\int_0^{\pi}\sin tdt=2$$

设 $n\pi\le x<(n+1)\pi$，则

$$2n=\int_0^{n\pi}|\sin t|dt\le\int_0^{x}|\sin t|dt\le\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt=2(n+1)$$

于是，

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\le\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|dt\le\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+1)\pi}=\frac{2}{\pi},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n\pi}=\frac{2}{\pi},$$

由夹逼定理可知，$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|dt=\frac{2}{\pi}$

四、用定积分定义求数列的极限

例 1．求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

分析：如果还想用夹逼定理中的方法来考虑

$$\frac{n^2}{n^2+n^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\le\frac{n^2}{n^2+1^2}$$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n^2}=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1^2}=1$

由此可见，无法再用夹逼定理，因此我们改用定积分定义来考虑

解：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

例 2．求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$

解：

$$\because \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1 \sin\pi x dx=\frac{2}{\pi}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{2}{\pi}$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}=\frac{2}{\pi}$

五、用洛必达法则求极限

1．$\frac{"0"}{0}$ 型和 $\frac{"\infty"}{\infty}$ 型

例 1．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\sin^3\frac{1}{n}}$

解：离散型不能直接用洛必达法则，故考虑

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}\overline{\overline{\text{等价无穷小代换}}}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{6}$

例 2．求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}}$

解：若直接用 $\frac{"0"}{0}$ 型洛必达法则 1，则得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{10x^9}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{5x^{12}}$ （不好办了，分母 x 的次数反而增加）

为了避免分子求导数的复杂性，我们先用变量替换，令 $\frac{1}{x^2}=t$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{-5}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^5}{e^t}$ $\left(\frac{"\infty"}{\infty}\text{型}\right)$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{5t^4}{e^t}=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{5!}{e^t}=0$$

口诀（15）：变量替换第一宝；由繁化简常找它。

例 3．设函数 $f(x)$ 连续，$f(0)\ne 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}$（分母作变量替换 $x-t=u$ ）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}$$（用洛必达法则，分子、分母各求导数）

（用积分中值定理）

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\(\xi\to 0)}}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}$$（ξ 在 0 和 x 之间）

$$=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}$$

2．$"\infty-\infty"$ 型和 $"0\cdot\infty"$ 型

例 1．求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{4}{4}\sin 2x\cos 2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{4}\sin 4x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{12x}$$

$$=\frac{4}{3}$$

例 2．设 $a>0$，$b>0$ 常数。求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right)$

解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\ \underline{\underline{令\frac{1}{x}=t}}\ \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{a^t-b^t}{t}$ $\left(\dfrac{"0"}{0}型\right)$

用洛必达法则

$$=\lim_{t\to 0^+}\left(a^t\ln a-b^t\ln b\right)$$

$$=\ln a-\ln b$$

$$=\ln\frac{a}{b}$$

3．"1^{∞}"型，"0^0"型和"∞^0"型

这类都是 $\lim[f(x)]^{g(x)}$ 形式可化为 $e^{\lim g(x)\ln[f(x)]}$

而 $\lim g(x)\ln[f(x)]$ 都是"$0\cdot\infty$"型，按 2 的情形处理

例 1．求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin^2 x}$

解：令 $y=x^{\sin^2 x}$，$\ln y=\sin^2 x\ln x$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\sin^2 x\ln x=\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} y=e^0=1$$

例 2．设 $a>0$，$b>0$ 常数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

解：先考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ 它是"1^{∞}"型

令 $y=\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$，$\ln y=x\left[\ln\left(a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}\right)-\ln 2\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}\right)-\ln 2}{\frac{1}{x}}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(a^t+b^t\right)-\ln 2}{t}\quad\left(\frac{"0"}{0}\text{型}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{a^t\ln a+b^t\ln b}{a^t+b^t}=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}$$

因此，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x=\sqrt{ab}$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}$

六、求分段函数的极限

例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin\ x}{|x|}\right)$

解： $\because |x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

又 $\lim\limits_{n\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ ， $\lim\limits_{n\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$

所以必须先分左、右极限考虑。

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{(-x)}\right)=2-1=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1$$

七、用导数定义求极限

例 1．设 $f'(x_0)=2$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0-2\Delta x)}{\Delta x}$

解：原式 $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)]-[f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)]}{\Delta x}$

$$=3\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}+2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{(-2\Delta x)}$$

$$=3f'(x_0)+2f'(x_0)$$

$$=5f'(x_0)$$

$$=10$$

例 2．设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，求 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$

解：由题设可知 $f(0)=0$， $f'(0)=(\sin x)'\Big|_{x=0}=1$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} 2\cdot\dfrac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{2}{n}-0}$

$$=2f'(0)$$

$$=2$$

八、递推数列的极限

例 1．设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值。

解：$\because x_1>0$，$3-x_1>0$，

$$\therefore 0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\le\frac{x_1+(3-x_1)}{2}=\frac{3}{2}$$

（几何平均值≤算术平均值，即 a>0, b>0 时，$\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$）

用数学归纳法可知 $n>1$时，$0<x_n\le\dfrac{3}{2}$，$\therefore\{x_n\}$有界。

又当 $n>1$时，$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n$

$$=\sqrt{x_n}\left(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\ge 0$$

$\therefore x_{n+1}\ge x_n$，则 $\{x_n\}$ 单调增加。

根据准则 1，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$ 存在

把 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限，得 $l=\sqrt{l(3-l)}$

$l^2=3l-l^2$，$l=0$（舍去）得 $l=\dfrac{3}{2}$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$

口诀（16）：递推数列求极限；单调有界要先证，两边极限一起上；方程之中把值找。

思考题 设 $x_1=2,x_2=2+\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_n=2+\dfrac{1}{x_{n-1}},\cdots$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

九、求极限的反问题

例 1．设 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$，求 a 和 b

解：由题设可知 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$，

$\therefore 1+a+b=0$，再由洛必达法则得

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x+a}{2x\cos(x^2-1)}$$ （用等价无穷小替换把 x^2-1 换 $\sin(x^2-1)$ 可以更简单）

$$=\frac{2+a}{2}=3$$

$a=4,b=-5$

例 2．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$，且满足 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$。

解：$\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[\ln f(x+hx)-\ln f(x)]}=e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{x}{hx}[\ln f(x+hx)-\ln f(x)]}=e^{x[\ln f(x)]'}$

（$F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ 　取 $F(x)=\ln f(x),\ \Delta x=hx$）

因此，$x[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x}$，$[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x^2}$，$\ln f(x)=-\dfrac{1}{x}+c'$

$f(x)=ce^{-\frac{1}{x}}$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，可知 $c=1$，　则 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

§1.3　连续

（甲）内容要点

一、函数连续的概念

1．函数在一点连续的概念

定义 1　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

定义 2　设函数 $y=f(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续。

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处既是左连续，又是右连续。

2．函数在区间内（上）连续的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续。

如果 $y=f(x)$ 在开区间内连续，在区间端点 a 右连续，在区间端点 b 左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。

二、函数的间断点及其分类

1．　函数的间断点的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点。

2．函数的间断点分为两类：

（1）第一类间断点

设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点，如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限都存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点。

第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点。

（2）第二类间断点

第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点。

常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点。

例如：$x=0$ 是 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的可去间断点，是 $f(x)=\frac{|x|}{x}$ 的跳跃间断点，是 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的无穷间断点，是 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 的振荡间断点。

三、初等函数的连续性

1．在区间 I 连续的函数的和、差、积及商（分母不为零），在区间 I 仍是连续的。

2．由连续函数经有限次复合而成的复合函数在定义区间内仍是连续函数。

3．在区间 I 连续且单调的函数的反函数，在对应区间仍连续且单调。

4．基本初等函数在它的定义域内是连续的。

5．初等函数在它的定义区间内是连续的。

四、闭区间上连续函数的性质

在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$，有以下几个基本性质，这些性质以后都要用到。

定理 1 （有界定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上有界。

定理 2 （最大值和最小值定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在这个区间上一定存在最大值 M 和最小值 m 。

其中最大值 M 和最小值 m 的定义如下：

定义　设 $f(x_0)=M$ 是区间 $[a,b]$ 上某点 x_0 处的函数值，如果对于区间 $[a,b]$ 上的任一点 x，总有 $f(x)\le M$，则称 M 为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值。同样可以定义最小值 m.

定理 3 （介值定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且其最大值和最小值分别为 M 和 m，则对于介于 m 和 M 之间的任何实数 c，在 $[a,b]$ 上至少存在一个 ξ，使得

$$f(\xi)=c$$

推论：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 (a,b) 内至少存在一个点 ξ，使得

$$f(\xi)=0$$

这个推论也称零点定理。

思考题：什么情况下能保证推论中的 ξ 是唯一的？

（乙）典型例题

一、讨论函数的连续性

由于初等函数在它的定义区间内总是连续的，所以，函数的连续性讨论多是指分段函数在分段点处的连续性。对于分段函数在分段点处的连续性，若函数在分段点两侧表达式不同时，需根据函数在一点连续的充要条件进行讨论。

例 1．讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, x<0 \\ 0, x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}, x>0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性。

解：因 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$f(0)=0$$

即有 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续。

二、间断点问题

例 1．设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续，且 $f(x)\neq 0$，$g(x)$ 有间断点，则下列函数中必有间断点的为（ ）

（A）$g[f(x)]$ （B）$[g(x)]^2$ （C）$f[g(x)]$ （D）$\dfrac{g(x)}{f(x)}$

解：（A），（B），（C）的反例：取 $f(x)\equiv 1, g(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$，

（D）成立的证明：用反证法

假如不然

$\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(x)$ 连续，则 $g(x)=h(x)f(x)$ 连续与条件矛盾，故 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 必有间断点。

例 2．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)-x\right]=f(x)$ 的间断点，并判别其类型。

解：当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$，$f(x)=-1-x$

当 $|x|=1$ 时，$f(x)=-x$

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=1-x$

所以 $f(x)=\begin{cases} -1-x, |x|<1 \\ -x, |x|=1 \\ 1-x, |x|>1 \end{cases}$ 它是分段函数，

分段点为 ± 1，$f(1)=-1$，$f(1-0)=-2$，$f(1+0)=0$，$f(-1)=1$，$f(-1-0)=2$，$f(-1+0)=0$。所以 ± 1 皆是第一类间断点，（跳跃间断点）

例 3．求 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=f(x)$的间断点，并判别其类型。

解：$x\neq k\pi$，考虑 $\ln f(x)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)$（用洛必达法则）

$$=\lim_{t\to x}\frac{x}{\cos t}\cdot\frac{\dfrac{\cos t}{\sin x}}{\dfrac{\sin t}{\sin x}}=\frac{x}{\sin x}$$

$$\therefore\quad f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}\quad (x\neq k\pi)$$

于是 $x=k\pi$（k 整数）是间断点，$x=0$ 是可去间断点。

$x=k\pi(k\neq 0)$是第二类间断点

三、用介值定理讨论方程的根

例 1．证明五次代数方程 $x^5-5x-1=0$ 在区间$(1,2)$内至少有一个根。

证：由于函数 $f(x)=x^5-5x-1$ 是初等函数，因而它在闭区间$[1,2]$上连续，而 $f(1)=1^5-5\times1-1=-5<0$

$$f(2)=2^5-5\times2-1=21>0$$

由于 $f(1)$与 $f(2)$异号，故在$(1,2)$中至少有一点 x_0，使

$$f(x_0)=0$$

就是说，五次代数方程 $x^5-5x-1=0$ 在区间$(1,2)$内至少有一个根。

口诀（17）：函数为零要论证，介值定理定乾坤。

例 2．设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(a)<a$，$f(b)>b$，

证明：$f(x)=x$ 在(a,b)内至少有一个根。

证：令 $g(x)=f(x)-x$，可知 $g(x)$在$[a,b]$上连续。

$$g(a)=f(a)-a<0$$

$$g(b)=f(b)-b>0$$

由介值定理的推论，可知 $g(x)$在(a,b)内至少有一个零点，即 $f(x)=x$ 在(a,b)内至少有一个根。

例 3．设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(0)=f(1)$。求证：在$[0,1]$上至少存在一点ξ使 $f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)=f(\xi)$（$n\geq 2$ 正整数）

证：令 $G(x)=f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)$，$\quad x\in\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right]$

则$G(0)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)$

$G\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)$

$G\left(\frac{2}{n}\right)=f\left(\frac{3}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)$

$\vdots$

$G\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

于是$G(0)+G\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+G\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(1)-f(0)=0$

（i）如果$G\left(\frac{i}{n}\right)(i=0,1,\cdots,n-1)$有为 0，则已经证明

$\because \xi=\frac{i}{n}$，$G(\xi)=0$，$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$成立。

（ii）如果$G\left(\frac{i}{n}\right)(i=0,1,\cdots,n-1)$全不为 0；

则不可能同号，否则相加后不为 0，矛盾。

所以其中一定有异号，不妨假设$0\le i_1<i_2\le n-1$，$G\left(\frac{i_1}{n}\right)$与$G\left(\frac{i_2}{n}\right)$异号。

根据介值定理推论存在$\xi\in\left(\frac{i_1}{n},\frac{i_2}{n}\right)$使$G(\xi)=0$

则$\xi\in(0,1)$，使$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$成立。

第二章　一元函数微分学

§2.1　导数与微分

（甲）内容要点

一、导数与微分概念

1．导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某领域内有定义，自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，相应地函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数（也称微商），记作 $f'(x_0)$，或 $y'\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 等，并称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导。如果上面的极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导。

导数定义的另一等价形式，令 $x=x_0+\Delta x$，$\Delta x=x-x_0$，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

我们也引进单侧导数概念。

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

则有

$f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处左、右导数皆存在且相等。

2．导数的几何意义与物理意义

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数 $f'(x_0)$ 存在，则在几何上 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率。

切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程：$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\left(f'(x_0)\neq 0\right)$

口诀（18）：切线斜率是导数，法线斜率负倒数。

设物体作直线运动时路程 S 与时间 t 的函数关系为 $S=f(t)$，如果 $f'(t_0)$ 存在，则 $f'(t_0)$ 表示物体在时刻 t_0 时的瞬时速度。

3．函数的可导性与连续性之间的关系

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处一定连续，反之不然，即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，却不一定在点 x_0 处可导。例如，$y=f(x)=|x|$，在 $x_0=0$ 处连续，却不可导。

4．微分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有增量 Δx 时，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 有下面的表达式

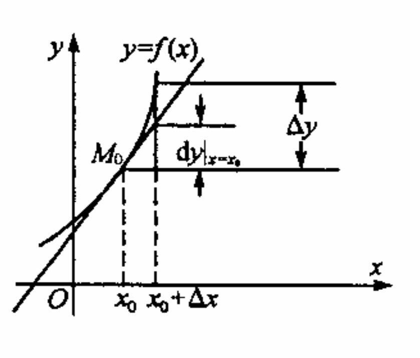
$$\Delta y = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

其中 $A(x_0)$ 为 Δx 为无关，$o(\Delta x)$ 是 $\Delta x \to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微，并把 Δy 中的主要线性部分 $A(x_0)\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分，记以 $dy\big|_{x=x_0}$ 或 $df(x)\big|_{x=x_0}$ 。

我们定义自变量的微分 dx 就是 Δx 。

5．微分的几何意义

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的纵坐标 $f(x_0)$ 的增量，微分 $dy\big|_{x=x_0}$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处切线的纵坐标相应的增量（见图）。



6．可微与可导的关系

$f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导。

口诀（19）：可导可微互等价；它们都比连续强。

且 $dy\big|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$

一般地，$y = f(x)$ 则 $dy = f'(x)dx$

所以导数 $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ 也称为微商，就是微分之商的含义。

7．高阶导数的概念

如果函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 在点 x_0 处仍是可导的，则把 $y' = f'(x)$ 在点 x_0 处的导数称为 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数，记以 $y''\big|_{x=x_0}$，或 $f''(x_0)$，或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=x_0}$ 等，也称 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导。

如果 $y = f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数存在，称为 $y = f(x)$ 的 n 阶导数，记以 $y^{(n)}$，$y^{(n)}(x)$，$\dfrac{d^ny}{dx^n}$ 等，这时也称 $y = f(x)$ 是 n 阶可导。

二、导数与微分计算

1．导数与微分表（略）

2．导数与微分的运算法则

（1）四则运算求导和微分公式

$$[f_1 f_2]' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$$

$$[f_1 f_2 f_3]' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$$

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$$

（2）反函数求导公式

设 $y = f(x)$ 的反函数为 $x = g(y)$，则 $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[g(y)]}$

（3）复合函数求导和微分公式

设 $y = f(u), u = g(x)$，则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'[g(x)]g'(x)$

（4）隐函数求导法则

每一次对 x 求导，把 y 看作中间变量，然后解出 y'

例：$e^{x+y} + \sin(3x - 2y) + 5x + 6y = 7$，确定 $y = y(x)$，求 y'

解：两边每一项对 x 求导，把 y 看作中间变量

$$e^{x+y}(1 + y') + [\cos(3x - 2y)](3 - 2y') + 5 + 6y' = 0$$

然后把 y' 解出来

（5）对数求导法

取对数后，用隐函数求导法则

$$y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$$

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3) - \ln(x-4)]$$

求导得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4})$$

解出 y'

$y = x^x \quad x > 0$

$y = e^{x \ln x}$ 解出 y'

$$\ln y = x \ln x$$

$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$ 解出 y'

（6）用参数表示函数的求导公式

设 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (\varphi'(t)\neq 0)$

（乙）典型例题

一、用导数定义求导数

例．设 $f(x)=(x-a)g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$

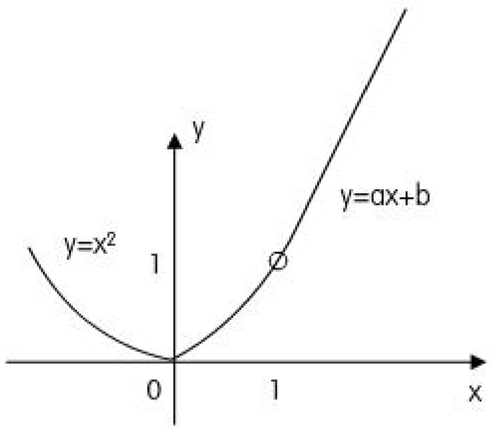
解： $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)g(x)-0}{x-a}=g(a)$

二、分段函数在分段点处的可导性

例 1．设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x\le 1\\ ax+b, x>1\end{cases}$$

试确定 a 、b 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导。



解：∵ 可导一定连续，

∴ $f(x)$ 在 $x=1$ 处也是连续的。

由 $$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$$

要使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，必须有 $a+b=1$ 或 $b=1-a$

又 $$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

要使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，必须 $f'_-(1)=f'_+(1)$，即 $2=a$ 。

故当 $a=2$，$b=1-a=1-2=-1$ 时，$f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导。

例 2．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$，问 a 和 b 为何值时，$f(x)$ 可导，且求 $f'(x)$

解：$\because x>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}e^{n(x-1)}=+\infty$，

$x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}e^{n(x-1)}=0$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1,\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1,\\ ax+b, & x<1,\end{cases}$$

由 $x=1$ 处连续性，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x^2=1$，$f(1)=\dfrac{a+b+1}{2}=1$，可知 $a+b=1$

再由 $x=1$ 处可导性，

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-f(1)}{x-1}$ 存在

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(ax+b)-f(1)}{x-1}$ 存在

且 $f'_+(1)=f'_-(1)$

根据洛必达法则 $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x}{1}=2$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{a}{1}=a$，

$\therefore a=2$

于是 $b=1-a=-1$

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1,\\ 1, & x=1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x\ge1,\\ 2, & x<1,\end{cases}$$

三、运用各种运算法则求导数或微分

例 1．设 $f(x)$ 可微，$y=f(\ln x)\cdot e^{f(x)}$，求 dy

解：

$$dy=f(\ln x)de^{f(x)}+e^{f(x)}df(\ln x)$$

$$=f'(x)e^{f(x)}f(\ln x)dx+\frac{1}{x}f'(\ln x)e^{f(x)}dx$$

$$=e^{f(x)}\left[f'(x)f(\ln x)+\frac{1}{x}f'(\ln x)\right]dx$$

例 2．设 $y=x^{x^x}$ $(x>0)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

解：

$\ln y = x^x \ln x$ 对 x 求导，得

$$\frac{1}{y} y' = \left(x^x\right)' \ln x + \frac{1}{x} x^x$$

再令 $y_1 = x^x$， $\ln y_1 = x \ln x$，对 x 求导，

$$\frac{1}{y_1} y_1' = \ln x + 1,$$

$$\therefore \left(x^x\right)' = x^x(\ln x + 1)$$

于是

$$\frac{dy}{dx} = \left[x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right] x^{x^x} \qquad (x > 0)$$

例 3．设 $y = y(x)$ 由方程 $x^y = y^x$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$

解：

两边取对数，得 $y \ln x = x \ln y$，

对 x 求导， $y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y} y'$

$$y'\left(\frac{x}{y} - \ln x\right) = \frac{y}{x} - \ln y, \quad y' = \frac{y^2 - xy\ln y}{x^2 - xy\ln x}$$

例 4．设

$$\begin{cases} x = \int_t^{t^2} e^{u2} \sin u du \\ y = \int_0^{2t} e^u \ln(1+u) du \end{cases} \qquad 求 \frac{dx}{dy}$$

解：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{2te^{t^4} \sin t^2 - e^{t^2} \sin t}{2e^{2t} \ln(1+2t)}$$

四、求切线方程和法线方程

例 1．已知两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求 $\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$。

解：

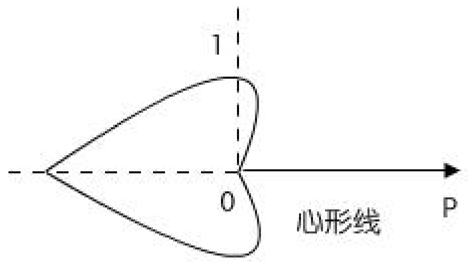
由已知条件可知 $f(0) = 0$， $f'(0) = \left.\frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\right|_{x=0} = 1$

故所求切线方程为 $y = x$

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2$$

例 2．已知曲线的极坐标方程 $r=1-\cos\theta$，求曲线上对应于 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程。

解：



曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=(1-\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta-\cos^2\theta \\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1$$

指定点处 $\theta=\frac{\pi}{6},r=1-\cos\frac{\pi}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 对应直角坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4})$

故切线方程

$$y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=1\cdot\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right)$$

即

$$x-y-\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{5}{4}=0$$

法线方程

$$y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=-\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right)$$

即

$$x+y-\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}=0$$

例 3．设 $f(x)$ 为周期是 5 的连续函数，在 $x=0$ 邻域内，恒有

$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+a(x)$。其中 $\lim_{x\to0}\frac{a(x)}{x}=0$， $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程。

解：

由题设可知 $f(6)=f(1)$， $f'(6)=f'(1)$，故切线方程为

$$y-f(1)=f'(1)(x-6)$$

所以关键是求出 $f(1)$ 和 $f'(1)$

由 $f(x)$ 连续性 $\lim\limits_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=-2f(1)$

由所给条件可知 $-2f(1)=0$，$\therefore f(1)=0$

再由条件可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{8x}{\sin x}+\dfrac{a(x)}{\sin x}\right)=8$

令 $\sin x=t$，$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=8$，又 $\because f(1)=0$

$\therefore$ 上式左边 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{[f(1+t)-f(1)]}{t}+3\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1-t)-f(1)}{(-t)}$

$$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)$$

则 $4f'(1)=8$ $\qquad f'(1)=2$

所求切线方程为 $y-0=2(x-6)$ $\quad$ 即 $2x-y-12=0$

五、高阶导数

1．求二阶导数

例 1．设 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$，求 y''

解：

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$y''=-\frac{1}{2}\left(x^2+a^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}}$$

例 2．设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\left(1+t^2\right)\end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{2}{\frac{1}{1+t^2}}=2(1+t^2)$$

例 3．设 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+y^2=1$ 所确定，求 y''

解：$2x+2yy'=0$，$y'=-\frac{x}{y}$

$$y''=-\frac{1\cdot y-xy'}{y^2}=-\frac{y+\frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}$$

2．求 n 阶导数（$n\geq 2$，正整数）

先求出 $y',y'',\cdots$，总结出规律性，然后写出 $y^{(n)}$，最后用归纳法证明。

有一些常用的初等函数的 n 阶导数公式

（1）$y=e^x$　　$y^{(n)}=e^x$

（2）$y=a^x(a>0,a\neq 1)$　　$y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$

（3）$y=\sin x$　　$y^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

（4）$y=\cos x$　　$y^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

（5）$y=\ln x$　　$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$

两个函数乘积的 n 阶导数有莱布尼兹公式

$$[u(x)v(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

其中 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$，$u^{(0)}(x)=u(x)$，$v^{(0)}(x)=v(x)$

假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是 n 阶可导

例 1．设 $y=x^k$（k 正整数），求 $y^{(n)}$　（n 正整数）

解：$y^{(n)}=\begin{cases}k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}, & n\leq k,\\ 0, & n>k\end{cases}$

例 2．设 $y=\frac{x^n}{1-x}$，求 $y^{(n)}$　（n 正整数）

解：$y=\dfrac{(x^n-1)+1}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}-(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

$$y^{(n)}=\left[(1-x)^{-1}\right]^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

例 3．设 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，求 $y^{(n)}$　（n 正整数）

解：$y=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}=(x-2)^{-1}-(x-1)^{-1}$

$$y'=-\left[(x-2)^{-2}-(x-1)^{-2}\right]$$

$$y''=(-1)(-2)\left[(x-2)^{-3}-(x-1)^{-3}\right]$$

……

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[(x-2)^{-(n+1)}-(x-1)^{-(n+1)}\right]$$

口诀（20）：有理函数要运算；最简分式要先行。

例 4．设 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$，求 $y^{(n)}$　（n 正整数）

解：$y=\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}(2+2\cos^2 2x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\cdot 4^n\cos(4x+\frac{n\pi}{2})=4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})$$

口诀（21）：高次三角要运算；降次处理先开路。

例 5．设 $y=x^3e^{2x}$，求 $y^{(n)}$　（n 正整数）

解：用莱布尼兹公式

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^3)^{(k)}(e^{2x})^{(n-k)}$$

$$=x^3(e^{2x})^{(n)}+3nx^2(e^{2x})^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}6x(e^{2x})^{(n-2)}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 6\cdot(e^{2x})^{(n-3)}$$

$$=2^{n-3}e^{2x}\left[8x^3+12nx^2+6n(n-1)x+n(n-1)(n-2)\right]$$

§ 2.2　微分中值定理

本节专门讨论考研数学中经常考的四大定理：罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理和泰勒定理（泰勒公式）。

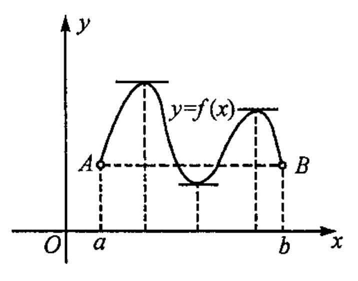
[注：数学三不考泰勒定理，数学四不考柯西中值定理和泰勒定理]

这部分有关考题主要是证明题，其中技巧性比较高，因此典型例题比较多，讨论比较详细。

（甲）内容要点

一、罗尔定理

设函数 $f(x)$ 满足



（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3） $f(a)=f(b)$

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

几何意义：条件（1）说明曲线 $y=f(x)$ 在 $A(a,f(a))$ 和 $B(b,f(b))$ 之间是连续曲线；[包括点 A 和点 B]。

条件（2）说明曲线 $y=f(x)$ 在 A,B 之间是光滑曲线，也即每一点都有不垂直于 x 轴的切线[不包括点 A 和点 B]。

条件（3）说明曲线 $y=f(x)$ 在端点 A 和 B 处纵坐标相等。

结论说明曲线 $y=f(x)$ 在点 A 和点 B 之间[不包括点 A 和点 B]至少有一点，它的切线平行于 x 轴。

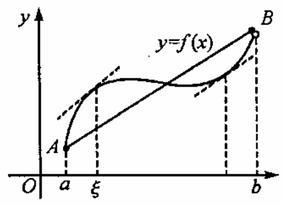
口诀（22）：导数为零欲论证；罗尔定理负重任。

二、拉格朗日中值定理

设函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导



则存在$\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

或写成 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \quad (a<\xi<b)$

有时也写成 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1)$

这里 x_0 相当 a 或 b 都可以，Δx 可正可负。

几何意义：条件（1）说明曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(a,f(a))$ 和点 $B(b,f(b))$ 之间[包括点 A 和点 B]是连续曲线：

条件（2）说明曲线 $y=f(x)$[不包括点 A 和点 B]是光滑曲线。

结论说明：曲线 $y=f(x)$ 在 A，B 之间[不包括点 A 和点 B]，至少有点，它的切线与割线 AB 是平行的。

推论 1　若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为常数。

推论 2　若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv g'(x)$，则在 $[a,b]$ 内 $f(x)=g(x)+C$，其中 C 为一个常数。

（注：拉格朗日中值定理为罗尔定理的推广，当 $f(a)=f(b)$ 特殊情形，就是罗尔定理）

口诀（23）：函数之差化导数；拉氏定理显神通。

三、柯西中值定理（数学四不要）

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上皆连续；

（2）在开区间 (a,b) 内皆可导；且 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

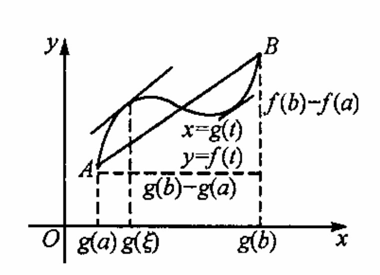
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a<\xi<b)$$

（注：柯西中值定理为拉格朗日中值定理的推广，特殊情形 $g(x)=x$ 时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理）

几何意义：考虑曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程 $\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases} \quad t\in[a,b]$

点 $A(g(a),f(a))$，点 $B(g(b),f(b))$ 曲线在 $\overset{\frown}{AB}$ 上是连续曲线，除端点外是光滑曲线，那么在曲线上至少有一

点，它的切线平行于割线 $\overline{AB}$ 。值得注意：在数学理论上，拉格朗日中值定理最重要，有时也称为微分学基本定理。罗尔定理看作拉格朗日中值定理的预备定理，柯西中值定理虽然更广，但用得不太多。在考研数学命题中，用罗尔定理最多，其次是用拉格朗日中值定理，而用柯西中值定理也是较少。



四、泰勒定理（泰勒公式）（数学一和数学二）

定理 1 （带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式）

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，则有公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$(x\to x_0)$

其中 $R_n(x)=o\left[(x-x_0)^n\right]\quad(x\to x_0)$ 称为皮亚诺余项。

$$\left(\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0\right)$$

前面求极限方法中用泰勒公式就是这种情形，根据不同情形取适当的 n ，所以对常用的初等函数如 e^x ，$\sin x$ ，$\cos x$ ，$\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^\alpha$ （α 为实常数）等的 n 阶泰勒公式都要熟记。

定理 2 （带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式）

设 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，在 $[a,b]$ 上有 n 阶连续导数，则对 $x\in[a,b]$，有公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，（$\xi$ 在 x_0 与 x 之间）称为拉格朗日余项。

上面展开式称为以 x_0 为中心的 n 阶泰勒公式。 $x_0=0$ 时，也称为麦克劳林公式。

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ ，那么泰勒公式就转化为泰勒级数，这在后面无穷级数中再讨论。

$f(a)=f(b)$ $g(x)=x$

罗尔定理 ← 拉格朗日中值定理 → 柯西中值定理

↑ n=0

泰勒定理

（乙）典型例题

一、用罗尔定理的有关方法

例 1．设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$。

试证：必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$

证：$\because$ $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，$\therefore$ $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且有最大值 M 和最小值 m。于是 $m\le f(0)\le M$；$m\le f(1)\le M$；$m\le f(2)\le M$，故

$m\le\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]\le M$。由连续函数介值定理可知，至少存在一点 $c\in[0,2]$ 使得 $f(c)=\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]=1$，因此 $f(c)=f(3)$，且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续，$(c,3)$ 内可导，由罗尔定理得出必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

例 2．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(0)$

求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=0$

证：由积分中值定理可知，存在 $c\in\left[\frac{2}{3},1\right]$，使得

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(c)\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

得到 $$f(c)=3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(0)$$

对 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上用罗尔定理，（三个条件都满足）

故存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$

例 3．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，对任意 $k>1$，有 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx$，

求证存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi)$

证：由积分中值定理可知存在 $c\in\left[0,\frac{1}{k}\right]$ 使得 $\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx=ce^{1-c}f(c)\left(\frac{1}{k}-0\right)$

令 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$，可知 $F(1)=f(1)$

这样 $F(1)=f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx=ce^{1-c}f(c)=F(c)$，对 $F(x)$ 在 $[c,1]$ 上用罗尔定理（三个条件都满足）存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$

而 $F'(x)=e^{1-x}f(x)-xe^{1-x}f(x)+xe^{1-x}f'(x)$

$\therefore F'(\xi)=\xi e^{1-\xi}\left[f'(\xi)-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)f(\xi)\right]=0$

又 $\xi e^{1-\xi}\neq 0$，则 $f'(\xi)=\left(1-\frac{1}{\xi}\right)f(\xi)$

在例 3 的条件和结论中可以看出不可能对 $f(x)$ 用罗尔定理，否则结论只是 $f'(\xi)=0$，而且条件也不满足。因此如何构造一个函数 $F(x)$，它与 $f(x)$ 有关，而且满足区间上罗尔定理的三个条件，从 $F'(\xi)=0$ 就能得到结论成立，于是用罗尔定理的有关证明命题中，如何根据条件和结论构造一个合适的 $F(x)$ 是非常关键，下面的模型 I，就在这方面提供一些选择。

模型 I：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$ 则下列各结论皆成立。

（1）存在 $\xi_1\in(a,b)$ 使 $f'(\xi_1)+lf(\xi_1)=0$ （l 为实常数）

（2）存在 $\xi_2\in(a,b)$ 使 $f'(\xi_2)+k\xi_2^{k-1}f(\xi_2)=0$ （k 为非零常数）

（3）存在 $\xi_3\in(a,b)$ 使 $f'(\xi_3)+g(\xi_3)f(\xi_3)=0$ （$g(x)$ 为连续函数）

证：（1）令 $F(x)=e^{lx}f(x)$，在 $[a,b]$ 上用罗尔定理

$\because F'(x)=le^{lx}f(x)+e^{lx}f'(x)$

$\therefore$ 存在 $\xi_1\in(a,b)$ 使 $F'(\xi_1)=le^{l\xi_1}f(\xi_1)+e^{l\xi_1}f'(\xi_1)=0$

消去因子 $e^{l\xi_1}$，即证。

（2）令 $F(x)=e^{x^K}f(x)$，在 $[a,b]$ 上用罗尔定理

$$F'(x)=kx^{k-1}e^{x^K}f(x)+e^{x^K}f'(x)$$

存在 $\xi_2\in(a,b)$ 使 $F'(\xi_2)=k\xi_2^{k-1}e^{\xi_2^k}f(\xi_2)+e^{\xi_2^k}f'(\xi_2)=0$

消去因子 $e^{\xi_2^k}$，即证。

（3）令 $F(x)=e^{G(x)}f(x)$，其中 $G'(x)=g(x)$

$F'(x)=g(x)e^{G(x)}f(x)+e^{G(x)}f'(x)$　由 $F'(\xi_3)=0$

消去因子 $e^{G(\xi_3)}$，即证。

口诀（24）：导数函数合为零；辅助函数用罗尔。

例 4．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，试证：

（1）存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$。

（2）对任意实数 λ，存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

证明：（1）令 $\Phi(x)=f(x)-x$，显然它在 $[0,1]$ 上连续，又 $\Phi(1)=-1<0$，$\Phi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$，根据介值定理，存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使 $\Phi(\eta)=0$ 即 $f(\eta)=\eta$

（2）令 $F(x)=e^{-\lambda x}\Phi(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，它在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi\in(0,\eta)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$e^{-\lambda\xi}\{f'(\xi)-\lambda[F(\xi)-\xi]-1\}=0$$

从而 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

（注：在例 4（2）的证明中，相当于模型 I 中（1）的情形，其中 l 取为 $-\lambda$，$f(x)$ 取为 $\Phi(x)=f(x)-x$）

模型 II：设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上皆连续，(a,b) 内皆可导，且 $f(a)=0$，$g(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$$

证：令 $F(x)=f(x)g(x)$，则 $F(a)=F(b)=0$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即证。

例 5．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，k 为正整数。

求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $\xi f'(\xi)+kf(\xi)=f'(\xi)$

证：令 $g(x)=(x-1)^k$，$a=0$，$b=1$，则 $f(0)=0$，$g(1)=0$，用模型 II，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f'(\xi)(\xi-1)^k+k(\xi-1)^{k-1}f(\xi)=0$$

故 $f'(\xi)(\xi-1)+kf(\xi)=0$

则 $\xi f'(\xi)+kf(\xi)=f'(\xi)$

例 6．设 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$，求证 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意两个零点之间至少有一个 $g(x)$ 的零点

证：反证法：设 $a<x_1<x_2<b$，$f(x_1)=0$，$f(x_2)=0$ 而在 (x_1,x_2) 内 $g(x)\neq 0$，

则令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $[x_1,x_2]$ 上用罗尔定理

[$\because f(x_1)=f(x_2)=0$，$\therefore F(x_1)=\dfrac{f(x_1)}{g(x_1)}=0$，$F(x_2)=\dfrac{f(x_2)}{g(x_2)}=0$]

（不妨假设 $g(x_1)\neq 0$，$g(x_2)\neq 0$ 否则结论已经成立）

则存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $F'(\xi)=0$，得出 $f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$ 与假设条件矛盾。所以在 (x_1,x_2) 内 $g(x)$ 至少有一个零点

例 7．设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$，又 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$

求证：（1）在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

（2）存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$

证：（1）用反证法，如果存在 $c\in(a,b)$ 使 $g(c)=0$，则对 $g(x)$ 分别在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上用罗尔定理，存在 $x_1\in(a,c)$ 使 $g'(x_1)=0$，存在 $x_2\in(c,b)$ 使 $g'(x_2)=0$，再对 $g'(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上用罗尔定理存在 $x_3\in(x_1,x_2)$ 使 $g''(x_3)=0$ 与假设条件 $g''(x)\neq 0$ 矛盾。所以在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$

（2）由结论可知即 $f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$，因此

令 $F(x)=g(x)f'(x)-g'(x)f(x)$，可以验证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$F(a)=F(b)=0$ 满足罗尔定理的三个条件

故存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$

于是 $f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$ 成立

二、用拉格朗日中值定理和柯西中值定理

例 1．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=e$，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$$

求 c 的值

解：由条件易见，$c\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{c}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{c}{x}\right)^x}$$

$$=\frac{e^c}{e^{-c}}$$

$$=e^{2c}$$

由拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)[x-(x-1)]=f'(\xi)$$

其中 ξ 介于 $(x-1)$ 与 x 之间，那么

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{\substack{x\to\infty\\(\xi\to\infty)}} f'(\xi)=e$$

于是 $e^{2c}=e$，$2c=1$，则 $c=\frac{1}{2}$

补充例题：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)\neq 0$，

求证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{\eta}$

证：令 $g(x)=e^x$ 使用柯西中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\dfrac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$

再对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 代入即可

口诀（25）：寻找 ξ,η 无约束，柯西拉氏先后上。

例 2．设 $f(x)$ 是周期为 1 的连续函数，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，又设 $M>0$ 是 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq 2M$。

证：由周期性可知 $f(0)=f(1)=f(2)=0$，不妨假定 $x_0\in(1,2)$ 而 $f(x_0)=M>0$，对 $f(x)$ 分别在 $[1,x_0]$ 和

$[x_0,2]$上用拉格朗日中值定理，

存在 $\xi_1 \in (1,x_0)$，使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}$　　①

存在 $\xi_2 \in (x_0,2)$，使得 $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}$　　②

如果 $x_0 \in \left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，则用①式，得 $|f'(\xi_1)|=\left|\dfrac{f(x_0)}{x_0-1}\right| \ge 2M$；

如果 $x_0 \in \left[\dfrac{3}{2},2\right)$，则用②式，得 $|f'(\xi_2)|=\left|\dfrac{-f(x_0)}{2-x_0}\right| \ge 2M$；

因此，必有 $\xi \in (1,2)$，使得 $|f'(\xi)| \ge 2M$

例 3．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

（I）存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$

（II）存在 $\eta,\zeta \in (0,1)$，$\eta \ne \zeta$，使 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

证：（I）令 $g(x)=f(x)+x-1$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $g(0)=-1<0$，$g(1)=1>0$，用介值定理推论存在 $\xi \in (0,1)$，使 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$

（II）在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理，存在 $\eta \in (0,\xi)$，使

得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\dfrac{1-\xi}{\xi}$

存在 $\zeta \in (\xi,1)$，$\eta \ne \zeta$，使 $f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$

$$=\frac{1-(1-\xi)}{1-\xi}$$

$$=\frac{\xi}{1-\xi}$$

$\therefore f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1$

口诀（26）：寻找 ξ,η 有约束，两个区间用拉氏。

例 4．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$，若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

（1）在 (a,b) 内 $f(x)>0$；

（2）在(a,b)内存在ξ，使

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)};$$

（3）在(a,b)内存在与（2）中ξ相异的点η，使

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx$$

证：（1）因为$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，故$\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=0$，由$f(x)$在$[a,b]$上连续，从而$f(a)=0$。又$f'(x)>0$知$f(x)$在$(a,b)$内单调增加，故

$$f(x)>f(a)=0, x\in(a,b)$$

（2）设$F(x)=x^2$，$g(x)=\int_a^x f(t)dt(a\le x\le b)$，

则$g'(x)=f(x)>0$，故$F(x)$，$g(x)$满足柯西中值定理的条件，于是在(a,b)内存在点ξ，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt}$$

$$=\left.\frac{(x^2)'}{\left(\int_a^x f(t)dt\right)'}\right|_{x=\xi},$$

即 $$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$$

（3）因$f(\xi)=f(\xi)-0=f(\xi)-f(a)$，在$[a,\xi]$上应用拉格朗日中值定理，知在$(a,\xi)$内存在一点$\eta$，使$f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$，从而由（2）的结论得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)},$$

即有 $$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx。$$

三、泰勒公式（数学一和数学二）

例 1．设$f(x)$在$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$。

求证：$\exists\xi\in(-1,1)$，使$f'''(\xi)=3$。

证：麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\eta)}{3!}x^3$$

其中 $x\in[-1,1]$，η 介于 0 与 x 之间。

$\because\ f'(0)=0$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}(-1)^2+\frac{1}{6}f'''(\eta_1)(-1)^3\quad(-1<\eta_1<0)$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}\cdot 1^2+\frac{1}{6}f'''(\eta_2)\cdot 1^3\quad(0<\eta_2<1)$$

后式减前式，得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$

$\because\ f'''(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上连续，设其最大值为 M，最小值为 m。

则 $m\le\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\le M$

再由介值定理，$\exists\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$

使 $f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3$

例 2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，试证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$|f''(\xi)|\ge 4\left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|$$

成立。

分析：因所欲证的是不等式，故需估计 $f''(\xi)$，由于一阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,\text{（其中 }\xi\text{ 在 }x_0,x\text{ 之间）}$$

含有 $f''(\xi)$，因此应该从此入手。再由 $f'(a)=f'(b)=0$ 知，应在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 两个区间上分别应用泰勒公式，以便消去公式中的 $f'(x)$ 项，同时又能出现 $(b-a)^2$ 项。

证：在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 上分别用泰勒公式，便有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,a<\xi_1<\frac{a+b}{2}.$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\frac{a+b}{2}<\xi_2<b.$$

两式相减，得

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)|&=\frac{1}{8}(b-a)^2|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|\\&\le\frac{1}{4}(b-a)^2\frac{1}{2}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)\\&\le\frac{1}{4}(b-a)^2\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}.\end{aligned}$$

所以至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

$$|f''(\xi)| \ge 4\left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|$$

§2.3　导数的应用

（甲）内容要点

一、判断函数的单调性

二、函数的极值

1．定义　设函数$f(x)$在(a,b)内有定义，x_0是(a,b)内的某一点，则

如果点x_0存在一个邻域，使得对此邻域内的任一点$x(x \ne x_0)$，总有$f(x) < f(x_0)$，则称$f(x_0)$为函数$f(x)$的一个极大值，称x_0为函数$f(x)$的一个极大值点；

如果点x_0存在一个邻域，使得对此邻域内的任一点$x(x \ne x_0)$，总有$f(x) > f(x_0)$，则称$f(x_0)$为函数$f(x)$的一个极小值，称x_0为函数$f(x)$的一个极小值点。

函数的极大值与极小值统称极值。极大值点与极小值点统称极值点。

2．必要条件（可导情形）

设函数$f(x)$在x_0处可导，且x_0为$f(x)$的一个极值点，则$f'(x_0)=0$

我们称满足$f'(x_0)=0$的x_0为$f(x)$的驻点，可导函数的极值点一定是驻点，反之不然。

极值点只能是驻点或不可导点，所以只要从这两点中进一步去判断。

3．第一充分条件

设$f(x)$在x_0处连续，在$0<|x-x_0|<\delta$内可导，$f'(x_0)$不存在，或$f'(x_0)=0$

1^0　如果在$(x_0-\delta, x_0)$内的任一点x处，有$f'(x)>0$，而在$(x_0, x_0+\delta)$内的任一点x处，有$f'(x)<0$，则$f(x_0)$为极大值，x_0为极大值点；

2^0　如果在$(x_0-\delta, x_0)$内的任一点x处，有$f'(x)<0$，而在$(x_0, x_0+\delta)$内的任一点x处，有$f'(x)>0$，则$f(x_0)$为极小值，x_0为极小值点；

3^0　如果在$(x_0-\delta, x_0)$内与$(x_0, x_0+\delta)$内的任一点x处，$f'(x)$的符号相同，那么$f(x_0)$不是极值，x_0不是极值点

4．第二充分条件

设函数$f(x)$在x_0处有二阶导数，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\ne 0$，则

当$f''(x_0)<0$，$f(x_0)$为极大值，x_0为极大值点

当 $f''(x_0) > 0$，$f(x_0)$为极小值，x_0为极小值点

三、函数的最大值和最小值

1．求函数 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值的方法。

首先，求出 $f(x)$在(a,b)内所有驻点，和不可导点$x_1,\cdots,x_k$。

其次计算 $f(x_1),\cdots,f(x_k),f(a),f(b)$

最后，比较 $f(x_1),\cdots,f(x_k),f(a),f(b)$，其中最大者就是 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值M；其中最小者就是 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值m。

2．最大（小）值的应用问题

首先要列出应用问题中的目标函数及其考虑的区间，然后再求出目标函数在区间内的最大（小）值。

四、凹凸性与拐点

1．凹凸的定义

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若对任意不同的两点 x_1,x_2，恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$ （$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$），则称 $f(x)$在I上是凸（凹）的

2．曲线上凹与凸的分界点，称为曲线的拐点。

口诀（28）凸 凹切线在上，下；凸凹转化在拐点

五、渐近线及其求法

六、函数作图

七、曲率（数一和）

（乙）典型例题

一、证明不等式

例 1．求证：当$x>0$时，$(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$

证：令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$

只需证明$x>0$时，$f(x)\ge 0$

易知 $f(1)=0$，$f'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x}$，

$f'(1)=0$，由于 $f'(x)$的符号不易判断，故进一步考虑

$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}$，$f''(1)=2>0$

再考虑 $f'''(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x^3}$

于是，当 $0<x<1$ 时， $f'''(x)<0$；

当 $1<x<+\infty$ 时， $f'''(x)>0$

由此可见， $f''(1)=2$ 是 $f''(x)$ 的最小值。

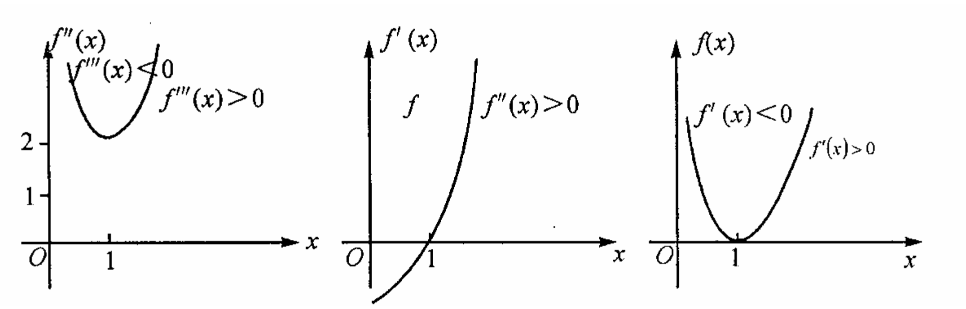
由于 $f''(x)\geq 2>0$，这样 $x>0$ 时， $f'(x)$ 单调增加

又因为 $f'(1)=0$，所以 $0<x<1$ 时， $f'(x)<0$；

$1<x<+\infty$ 时， $f'(x)>0$。

再由 $f(1)=0$，可知 $0<x<1$ 时， $f(x)>0$；

$1<x<+\infty$ 时， $f(x)>0$，这样证明了 $x>0$ 时， $f(x)\geq 0$。



证二：令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$（自己思考）

证三：令 $f(x)=(x+1)\ln x-(x-1)$（自己思考）

例 2．设 $b>a>0$，求证： $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{b+a}$

证：令 $f(x)=(\ln x-\ln a)(x+a)-2(x-a)$， $(x\geq a)$

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}(x+a)+(\ln x-\ln a)-2$

$$f''(x)=\frac{-a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-a}{x^2}>0\quad (x>a)$$

于是可知 $f'(x)$ 在 $x>a$ 时单调增加，又 $f'(a)=0$， $\therefore x>a$ 时 $f'(x)>0$，这样 $f(x)$ 单调增加。因此， $b>a>0$ 时 $f(b)>f(a)=0$，得证。

例 3．设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$

证一：对函数 $f(x)=\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上用拉格朗日中值定理

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)\qquad (a<\xi<b)$$

再来证明$\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$在$t>e$时单调减少

$\because\ \varphi'(\mathrm{t})=\dfrac{1-\ln t}{t^2}<0\ (t>e)$

从而$\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$，即$\dfrac{\ln\xi}{\xi}>\dfrac{\ln e^2}{e^2}=\dfrac{2}{e^2}$

故$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$

证二：设$g(x)=\ln^2 x-\dfrac{4}{e^2}x$，则$g'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{4}{e^2}$

$g''(x)=2\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

当$x>e$时，$g''(x)<0$，故$g'(x)$单调减少

$g'(x)>g'(e^2)=\dfrac{4}{e^2}-\dfrac{4}{e^2}=0$

因此$e<x<e^2$时，由$g'(x)>0$可知$g(x)$单调增加

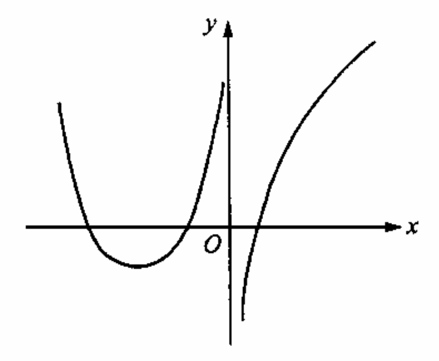
题设$e<a<b<e^2$，于是$g(b)>g(a)$

故$\ln^2 b-\dfrac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\dfrac{4}{e^2}a$，即$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$

二、有关函数的极值

例 1．设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$有（　　）

（A）一个极小值点和两个极大值点
（B）两个极小值点和一个极大值点
（C）两个极小值点和两个极大值点
（D）三个极小值点和一个极大值点



例 2．设 $f(x)$的导数在$x=a$处连续，又$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$， 则（　　）

（A） $x=a$是 $f(x)$的极小值点

（B） $x=a$是 $f(x)$的极大值点

（C）$(a,f(a))$是曲线$y=f(x)$的拐点

（D）$x=a$ 不是极值点，$(a, f(a))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点

解一： $\because \lim\limits_{x\to a}(x-a)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to a} f'(x)=0$

又由 a 点导数连续性 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a} f'(x)=0$

于是 $f''(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=-1<0$

则 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

解二：由极限可知，当 $a-\delta<x<a+\delta$ 时，$-1-\varepsilon<\dfrac{f'(x)}{x-a}<-1+\varepsilon<0$

当 $a<x<a+\delta$，$x-a<0$，$\therefore\ f'(x)>0$

当 $a-\delta<x<a$，$x-a>0$，$\therefore\ f'(x)<0$

于是 $x-a$ 时是 $f(x)$ 的极大值点

例 3．设 $y=f(x)$有二阶导数，满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$

求证：$f'(x_0)=0$ 时，$f(x_0)$为极小值

证:（1）$x_0\neq 0$ 情形。

$$f''(x_0)=\frac{1-e^{-x_0}}{x_0}>0 \quad \begin{pmatrix} x_0>0, & 1-e^{-x_0}>0 \\ x_0<0, & 1-e^{-x_0}<0 \end{pmatrix}$$故 $f(x_0)$为极小值

（2）$x_0=0$ 情形

这时方程条件用 $x=0$ 代入下行，无法得出上面的公式

$\because\ f''(x)$存在

$\therefore\ f'(x)$连续，$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{1}$$ （用洛必达法则）

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1-e^{-x}}{x}-3[f'(x)]^2\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}$$ （再用洛必达法则）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{1}=1>0$$

$\therefore\ f(0)$是极小值

三、最大（小）值的应用题（略）

第三章　一元函数积分学

§3.1　不定积分

（甲）内容要点

一、基本概念与性质

1．原函数与不定积分的概念

设函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $F'(x)=f(x)$ 在区间 I 上成立。则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 的原函数，$f(x)$ 在区间 I 中的全体原函数成为 $f(x)$ 在区间 I 的不定积分，记为 $\int f(x)dx$。

原函数：$\int f(x)dx=F(x)+C$

其中 $\int$ 称为积分号，x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积分函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式。

2．不定积分的性质

设 $\int f(x)dx=F(x)+C$，其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数。

则（1）$\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F(x)+C$ 或 $\int d[F(x)+C]=F(x)+C$

（2）$\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$ 或 $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$

（3）$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

（4）$\int [f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

3．原函数的存在性

一个函数如果在某一点有导数，称为可导；一个函数有不定积分，称为可积。
原函数存在的条件：比连续要求低，连续一定有原函数，不连续有时也有原函数。可导要求比连续高。

$\int e^{-x}dx$ 这个不定积分一般称为积不出来，但它的积分存在，只是这个函数的积分不能用初等函数表示出来

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上原函数一定存在，但初等函数的原函数不一定是初等函数，例如 $\int \sin(x^2)dx$，$\int \cos(x^2)dx$，$\int \frac{\sin x}{x}dx$，$\int \frac{\cos x}{x}dx$，$\int \frac{dx}{\ln x}$，$\int e^{-x^2}dx$ 等被积函数有原函数，但不能用初等函数表示，故这些不定积分均称为积不出来。

二、基本积分表（略）

补充公式：

$$(1)\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$(2)\int \frac{dx}{a^2+x^2}(a>0)=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$(3)\int\frac{dx}{a^2-x^2}(a>0)=\frac{1}{2a}\ln|\frac{a+x}{a-x}|+C$$

$$(4)\int\sec xdx=\ln|\sec x-\tan x|+C$$

$$(5)\int\csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

$$(6)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$$

三、换元积分法和分部积分法

1．第一换元积分法（凑微分法）

设 $\int f(u)du=F(u)+C$，又 $\varphi(x)$ 可导，

则 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$

$\underline{\underline{令u=\varphi(x)}}\int f(u)du=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C$ 这里要求读者对常用的微分公式要“倒背如流”，也就是非常熟练地凑出微分。

例：$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2)\underline{\underline{u=x^2}}\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

口诀（30）第一换元经常用；微分方程要背熟。

2．第二换元积分法

例：$(1)\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1}令x=t^2=\int\frac{2tdt}{t+1}$

$(2)\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}令x=t^6=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}$

（3）遇 $\sqrt{a^2-x^2}$ 令 $x=a\sin t$

假如令 $a^2-x^2=t^2$； $x^2=a^2-t^2$； $x=\sqrt{a^2-t^2}$ ； $dx=?$（不行）

令 $x=a\sin t$； $\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=a\cos t$

$dx=a\cos tdt$

；遇 $\sqrt{a^2+x^2}$ 令 $x=a\tan t$；遇 $\sqrt{x^2-a^2}$ 令 $x=a\sec t$

$\int\sqrt{1+x+x^2}dx=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2}$ ； $x=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$

设 $x=\varphi(t)$ 可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，若 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=G(t)+C$，

则 $\int f(x)dx\underline{\underline{令x=\varphi(t)}}\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=G(t)+C=G[\varphi^{-1}(x)]+C$

其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数。

口诀（31）第二换元去根号；规范模式可依靠。

$\int\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{2x+1}d(2x+1)\ \underline{\underline{令2x+1=u}}\ \frac{1}{2}\int\sqrt{u}du=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.u^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$

3．分部积分法

设$u(x)$，$v(x)$均有连续的导数，则

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$$或

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

例 1：$\int xe^{x}dx=\int xde^{x}=xe^{x}-\int e^{x}dx=xe^{x}-e^{x}+C$

$$\int \frac{1}{2}e^{x}dx^{2}=\frac{1}{2}x^{2}e^{x}-\frac{1}{2}\int x^{2}de^{x}=\frac{1}{2}x^{2}e^{x}-\frac{1}{2}\int x^{2}e^{x}dx$$

口诀（32）分部积分难变易，弄清 u,v 是关键

例 2：$\int x^{100}e^{x}dx$

$$\int x^{100}\ln xdx=\frac{1}{101}\int \ln xdx^{101}=\frac{x^{101}}{101}\ln x-\frac{1}{101}\int x^{101}d\ln x$$

$$=\frac{x^{101}}{101}\ln x-\frac{1}{101}\int x^{100}dx=\frac{x^{101}}{101}\ln x-\frac{1}{(101)^{2}}x^{101}+C$$

（1）$P_n(x)e^{ax}$，$P_n(x)\sin ax$，$P_n(x)\cos ax$情形，$P_n(x)$为n次多项式，a为常数。要进行n次分部积分法，每次均取e^{ax}，$\sin ax$，$\cos ax$为$v'(x)$；多项式部分为$u(x)$。

（2）$P_n(x)\ln x$，$P_n(x)\arcsin x$，$P_n(x)\arctan x$情形，$P_n(x)$为n次多项式取$P_n(x)$为$v'(x)$，而$\ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$为$u(x)$，用分部积分法一次，被积函数的形式发生变化，再考虑其它方法。

（乙）典型例题

例 1．求下列不定积分（测试题，限 15 分钟）

（1）$\int \frac{dx}{x^{2}e^{\frac{1}{x}}}$

（2）$\int (x\ln x)^{\frac{3}{2}}(\ln x+1)dx$

（3）$\int \frac{\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)+5}}{\sqrt{x^{2}+1}}dx$

（4）$\int \frac{1-\ln x}{(x+\ln x)^{2}}dx$

（5）$\int \frac{\cos^{2}x-\sin x}{\cos x\left(1+\cos xe^{\sin x}\right)}dx$

（6）$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^{2}\cos^{2}x+b^{2}\sin^{2}x}}dx$　　（$b^{2}\neq a^{2}$常数）

例 2．求下列不定积分

（1）$\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx$

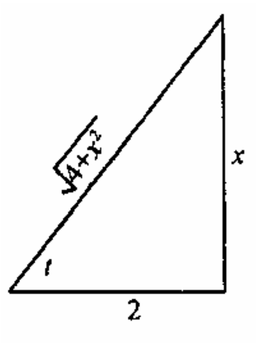
（2）$\int \frac{dx}{(x+a)^2 (x+b)^2} \quad (a \neq b)$

（3）$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad (|a| \neq |b|)$

（4）$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

例 3．求$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

例 4．求$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4 + x^2}} dx$



解一：

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4+x^2}} dx = \left[\begin{array}{c} x = 2\tan t \\ dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \end{array} \right] \int \frac{1}{4\tan^2 t} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\cos t}} \cdot \frac{2}{\cos^2 t} dt$$

$$= \int \frac{\cos t}{4\sin^2 t} dt = -\frac{1}{4\sin t} + C = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$ （这里已设 $x > 0$）

解二：倒代换

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4+x^2}} dx = \int \frac{1}{x^3 \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} dx$$

$$\because \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2} d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

原式$= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} d\left(\frac{4}{x^2} + 1\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{x^2} + 1} + C = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C \ (\because x > 0)$

例 5．求 $\int(\arcsin x)^2 dx$

解一：

$$\int(\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - \int x d(\arcsin x)^2 = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\left[\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int\sqrt{1-x^2}d\arcsin x\right]$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\left[\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int dx\right]$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$$

解二：令 $\arcsin x = t$，则 $x = \sin t$，

$$\int(\arcsin x)^2 dx = \int t^2 d\sin t = t^2\sin t - 2\int t\sin t dt$$

$$= t^2\sin t + 2\int t d\cos t = t^2\sin t + 2t\cos t - 2\int\cos t dt$$

$$= t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$$

例 6．设 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x) = \ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，求 $I = \int xf'(x)dx$

例 7．设 $F'(x) = f(x)$，当 $x \ge 0$ 时 $f(x)F(x) = \dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，又 $F(0)=1$，$F(x)>0$，求 $f(x)$ $(x \ge 0)$

例 8．设 $f(\sin^2 x) = \dfrac{x}{\sin x}$，求 $I = \int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$

解一：令 $u = \sin^2 x$，则 $\sin x = \sqrt{u}$，$x = \arcsin\sqrt{u}$，$f(u) = \dfrac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$

则 $I = \int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = -\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d(1-x) = -2\int\arcsin\sqrt{x}d\sqrt{1-x}$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int\sqrt{1-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$$

解二：令 $x = \sin^2 t$，则 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{\sin t}{\cos t}$，$dx = 2\cos t\sin t dt$，

则 $I = \int\dfrac{\sin t}{\cos t}\cdot\dfrac{t}{\sin t}\cdot 2\sin t\cos t dt = -2\int t d\cos t$

$$= -2t\cos t + 2\int\cos t dt = -2t\cos t + 2\sin t + C$$

$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

§ 3.2　定积分和广义积分的概念与计算方法

（甲）内容要点

一、定积分的概念与性质

1．定积分的定义及其几何意义

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

2．定积分的性质

中值定理，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

定义：我们称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分平均值。

二、基本定理

1．变上限积分的函数

定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$ 推广形式，设 $F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，

则 $F'(x)=f[\varphi_2(x)]\varphi_2{}'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1{}'(x)$

2．牛顿一莱布尼兹公式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上任意一个原函数，则有 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

三、定积分的换元积分法和分部积分法

1．$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$（$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数，单调，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$）

2．$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$

四、广义积分

定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的积分区间 $[a,b]$ 是有限区间，又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界的，如果积分区间推广到无穷区间或 $f(x)$ 推广到无界函数就是两种不同类型的广义积分。

1．无穷区间上的广义积分

定义：$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

若极限存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是收敛的，它的值就是极限值；若极限不存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是发散的。而发散的广义积分没有值的概念。

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

同样有收敛和发散的概念，收敛的广义积分有值的概念。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

$\int_0^1 \sqrt{x}dx$， $x=0$ 时无意义，称 $x=0$ 为瑕点

2．无界函数的广义积分（瑕积分）

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，则称 b 为 $f(x)$ 的瑕点。

定义 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\epsilon\to0^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$

若极限存在，则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，且它的值就是极限值，若极限不存在，则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。发散的广义积分没有值的概念。

（1）设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，则称 a 为 $f(x)$ 的瑕点

定义 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\epsilon\to0^+}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$

若极限存在，则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，且它的值就是极限值，

若极限不存在，则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散，它没有值。

$$\int \frac{1}{x}dx = 2\sqrt{x}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$$

（3）设 $f(x)$ 在 $[a,c)$ 和 $(c,b]$ 皆连续，且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，则称 C 为 $f(x)$ 的瑕点定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2\to0^+}\int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)dx$$

（乙）典型例题

一、一般方法

例 1．计算下列定积分

（1）$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)dx + \int_1^e \ln x dx = (-x\ln x + x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_{1}^{e} = 2\left(1-\frac{1}{e}\right)$

（2）$\int_{-2}^{3} \min\{1, x^2\}dx = \int_{-2}^{-1}dx + \int_{-1}^{1}x^2dx + \int_1^3 dx = \frac{11}{3}$

（3）$\int_{-2}^{2} \max\{x, x^2\}dx = \int_{-2}^{0}x^2dx + \int_0^1 xdx + \int_1^2 x^2dx = \frac{11}{2}$

（4）$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin 2x}dx = \int_0^{2\pi}\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}dx = \int_0^{2\pi}|\sin x - \cos x|dx$

$$=2\int_0^{\pi}\left|\sin x-\cos x\right|dx=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx\right]=4\sqrt{2}$$

二、用特殊方法计算定积分

例 1．计算下列定积分

（1）$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$ （ f 为连续函数， $f(\sin x)+f(\cos x)\neq 0$ ）

（2）$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

（3）$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^a}$ （a 常数）（$(\tan x)^a\neq -1$）

（4）$I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{2\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx$

例 2．设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\ln x-\int_1^e f(x)dx$，求 $\int_1^e f(x)dx$

例 3．设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$， $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)dx$

三、递推方法

例 1．设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx \quad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$

（1）求证当 $n\geq 2$ 时， $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$

（2）求 I_n

$$\int\sin^2 xdx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$$

$$\int\sin^4 xdx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2\sin^2 x)dx=\int\frac{1}{2}[1-\cos 2(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)]dx$$

$$\int\sin^3 xdx=\int\sin^2 xd(-\cos x)=\int(1-\cos^2 x)d(-\cos x)$$

例 2．设 $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx \quad (n=0,1,2,\ldots)$，求证 $J_n=I_n \quad (n=0,1,2,\ldots)$

例 3．设 $K_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n} xdx \quad (n=1,2,3,\ldots)$，求证 $K_n=\frac{1}{2n-1}-K_{n-1}$

例 4．计算 $G_n=\int_{-1}^1(x^2-1)^n dx$ （n 为正整数）

四、广义积分

例 1．计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

例 2．计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$

注：$\frac{1}{1+x^4}$ 可以化为最简分式的形式，

$$1+x^4=1+2x^2+x^4-2x^2=(1+x^2)^2-(\sqrt{2}x)^2=(1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2)$$

但这样做太繁，故用其它技巧

解：令 $x=\frac{1}{t}$，$I=\int_{+\infty}^{0}\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^4}=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$$

由于 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{\substack{\in\to0^+\\ \lambda\to+\infty}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\in}^{\lambda}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

§3.3　有关变上（下）限积分和积分证明题

一、有关变上（下）限积分

例 1．设 $f(x)=\int_0^{a-x}e^{t(2a-t)}dt$　（a 常数），求 $I=\int_0^a f(x)dx$

解：$I=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a xf'(x)dx=-\int_0^a xe^{(a-x)[2a-(a-x)]}(-1)dx$

$$=\int_0^a xe^{\left(a^2-x^2\right)}dx=-\frac{1}{2}\int_0^a e^{\left(a^2-x^2\right)}d\left(a^2-x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}e^{\left(a^2-x^2\right)}\Big|_0^a=\frac{1}{2}\left(e^{a^2}-1\right)$$

例 2．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(1)=\frac{5}{2}$，对所有 $x\in(0,+\infty)$，$t\in(0,+\infty)$，

均有 $\int_1^{xt}f(u)du=t\int_1^x f(u)du+x\int_1^t f(u)du$，求 $f(x)$

口诀（33）：变限积分双变量；先求偏导后求导。

例 3．设 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $\int_0^{2x}xf(t)dt+2\int_x^0 tf(2t)dt=2x^3(x-1)$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值与最小值。

例 4．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明 $g(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加

二、积分证明题

例 1．设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，$\int_0^\pi f(x)dx=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$，求证存在

$\xi_1\in(0,\pi)$，$\xi_2\in(0,\pi)$，$\xi_1\neq\xi_2$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

例 2．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的一阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，试证：$\int_0^1|f(x)|dx\le\frac{M}{4}$，其中 $M=\max\limits_{0\le x\le1}|f'(x)|$

例 3．设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

证一：（引入参数法）

设 t 为实参数，则 $\int_a^b[f(x)+tg(x)]^2dx\ge0$

$$\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]t^2+2\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]t+\int_a^b f^2(x)dx\ge0$$

作为 t 的一元二次不等式 $At^2+2Bt+C\ge0$，则 $B^2-AC\le0$

即 $B^2\le AC$，因此 $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

证二：（引入变上限积分）

令 $F(u)=\left[\int_a^u f(x)g(x)dx\right]^2-\left[\int_a^u f^2(x)dx\right]\left[\int_a^u g^2(x)dx\right]$

于是

$$F'(u)=2f(u)g(u)\int_a^u f(x)g(x)dx-f^2(u)\int_a^u g^2(x)dx-g^2(u)\int_a^u f^2(x)dx$$

$$=\int_a^u\left[2f(u)g(u)f(x)g(x)-f^2(u)g^2(x)-g^2(u)f^2(x)\right]dx$$

$$=-\int_a^u[f(u)g(x)-g(u)f(x)]^2dx\le0\qquad(u\ge a)$$

则 $F(u)$ 在 $[a,b]$ 上单调不增　故 $b\ge a$ 时，$F(b)\le F(a)=0$，

即 $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2-\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\le0$

证三：（化为二重积分处理）

令 $I=\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$，

则 $I=\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(y)dy=\iint\limits_D f^2(x)g^2(y)dxdy$，

其中区域 $D:\begin{cases}a\le x\le b\\a\le y\le b\end{cases}$，同理 $I=\iint\limits_D f^2(y)g^2(x)dxdy$

$$\therefore 2I=\iint\limits_D\left[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)\right]dxdy$$

$$\because a^2+b^2\ge 2ab\text{，故 }2I\ge\iint_D[2f(x)g(y)f(y)g(x)]dxdy$$

因此，

$$I=\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\ge\int_a^b f(x)g(x)dx\int_a^b f(y)g(y)dy=\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2$$

口诀（34）：定积分化重积分；广阔天地有作为。

例 4．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$

例 5．设 $f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f_0(x)>0$，证明

$$\int_a^b f_0(x)dx\int_a^b\frac{1}{f_0(x)}dx\ge(b-a)^2$$

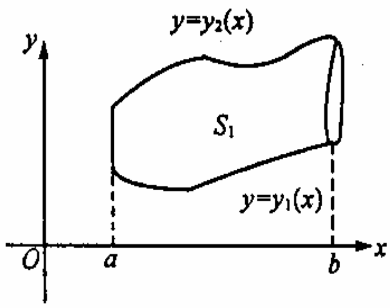
例 6．设 $f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，且 $f_0(a)=f_0(b)=0$，$\int_a^b f_0{}^2(x)dx=1$，求证：$\left(\int_a^b[f_0'(x)]^2dx\right)\left(\int_a^b x^2 f_0{}^2(x)dx\right)\ge\frac{1}{4}$

§ 3.4　定积分的应用

（甲）内容要点

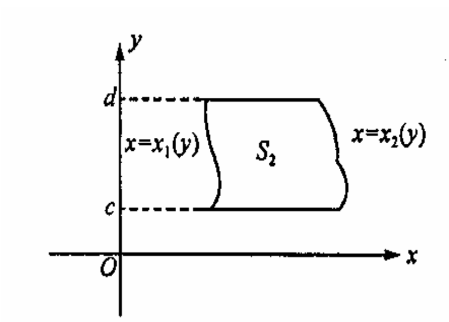
一、平面图形的面积

1．直角坐标系



模型 I　$S_1=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]dx$，

其中　$y_2(x)\ge y_1(x)$，$x\in[a,b]$

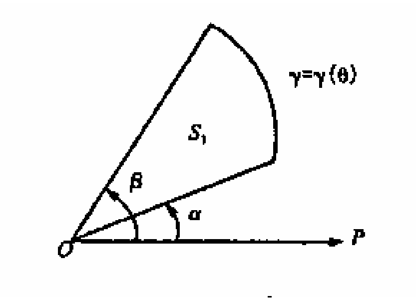


模型 II　$S_2=\int_c^d\left[x_2(y)-x_1(y)\right]dy$，

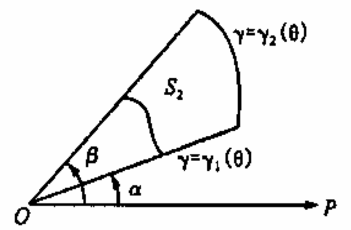
其中　$x_2(y)\ge x_1(y)$，$y\in[c,d]$

注：复杂图形分割为若干个小图形，使其中每一个符合模型 I 或模型 II 加以计算，然后再相加。

2．极坐标系

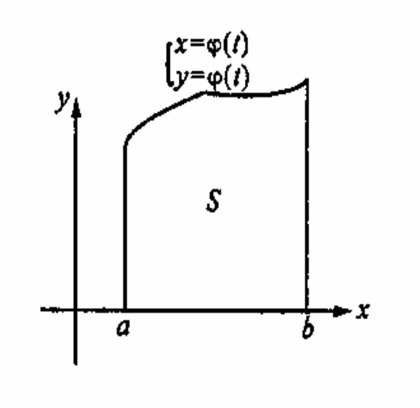


模型 I　$S_1=\dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$



模型 II　$S_2=\dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[r_2^{\,2}(\theta)-r_1^{\,2}(\theta)\right]d\theta$

3．参数形式表出的曲线所围成的面积



设　曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$　$(\alpha\le t\le\beta)$

$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上有连续导数，且 $\varphi'(t)$ 不变号，$\psi(t)\ge 0$ 且连续。

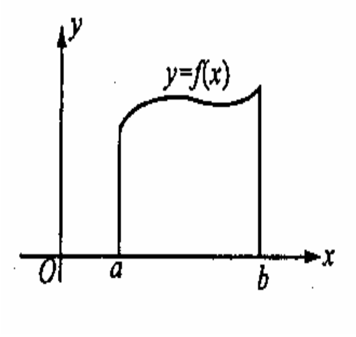
则曲边梯形面积（曲线 C 与直线 $x=a$，$x=b$ 和 x 轴所围成）

$$S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt$$

二、平面曲线的弧长（数学一和数学二）（略）

三、绕坐标轴旋转的旋转体的体积

（1）平面图形由曲线 $y = f(x)\,(\geq 0)$ 与直线 $x=a$， $x=b$ 和 x 轴围成绕 x 轴旋转一周的体积

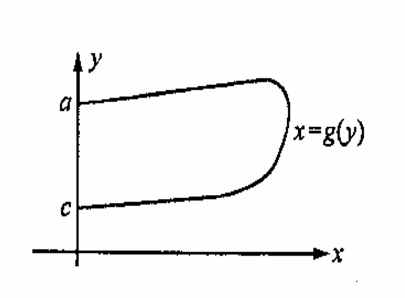


$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad \because dV_x = \pi f^2(x)dx$$

绕 y 轴旋转一周的体积

$$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx \qquad \because dV_y = 2\pi xf(x)dx$$

（2）平面图形由曲线 $x = g(y)\,(\geq 0)$ 与直线 $y=c$， $y=d$ 和 y 轴围成绕 y 轴旋转一周的体积



$$V_y = \pi\int_c^d g^2(y)dy$$

绕 x 轴旋转一周的体积

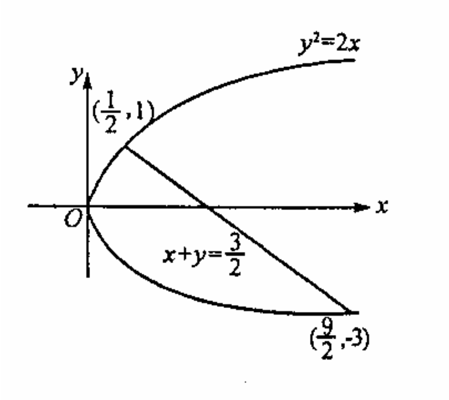
$$V_x = 2\pi\int_c^d yg(y)dy$$

四、绕坐标轴旋转的旋转曲面的面积（数学一和数学二）（略）

（乙）典型例题

一、在几何方面的应用

例 1．求曲线 $y^2 = 2x$ 在点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 处法线与曲线所围成图形的面积



解：先找出法线方程

$2yy'=2$， $y'\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)}=\frac{1}{y}\Big|_{y=1}=1$

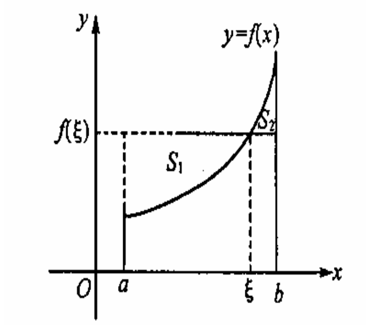
法线方程 $y-1=(-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$$x+y=\frac{3}{2}$$

曲线 $y^2=2x$ 和法线 $x+y=\frac{3}{2}$ 的另一交点为 $\left(\frac{9}{2},-3\right)\Bigg|$ $\left(\frac{9}{2},-3\right)$

所求面积 $S=\int_{-3}^{1}\left[\left(\frac{3}{2}-y\right)-\frac{y^2}{2}\right]dy=\frac{16}{3}$

例 2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，且唯一，使得 $y=f(x)$，$y=f(\xi)$，$x=a$，所围面积 S_1 是 $y=f(x)$，$y=f(\xi)$，$x=b$ 所围面积 S_2 的三倍。



证：令 $F(t)=S_1(t)-3S_2(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]dx-3\int_t^b[f(x)-f(t)]dx$

$\because F(a)=-3\int_a^b[f(x)-f(a)]dx<0$

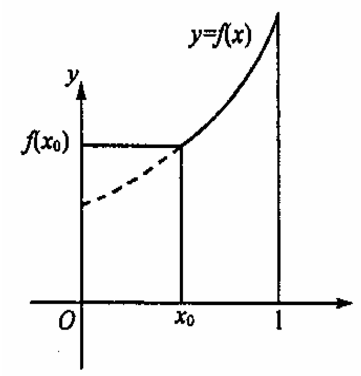
$F(b)=\int_a^b[f(b)-f(x)]dx>0$

由连续函数介值定理的推论可知 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $F(\xi)=0$ 再由 $f'(x)>0$，可知 $f(x)$ 的单调增加性，则 ξ 唯一

例 3. 设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为任一非负连续函数。 （自己阅读）

（1）试证：$\exists x_0\in(0,1)$，使 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积。

（2）又设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明（1）中 x_0 唯一。



（1）证：设$F(x)=x\int_x^1 f(t)dt$，则$F(0)=F(1)=0$，且$F'(x)=\int_x^1 f(t)dt-xf(x)$，对$F(x)$在$[0,1]$上用罗尔定理$\exists x_0\in(0,1)$，使$F'(x_0)=0$，即$\int_{x_0}^1 f(t)dt=x_0 f(x_0)$证毕

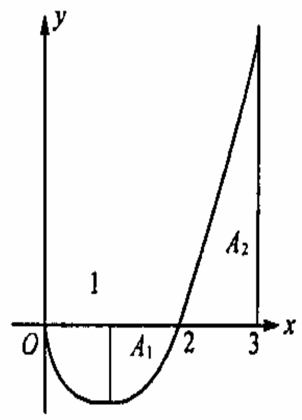
（2）证：令$\varphi(x)=\int_x^1 f(t)dt-xf(x)$，当$x\in(0,1)$时，

$$\varphi'(x)=-f(x)-f(x)-xf'(x)$$

$$=-2f(x)-xf'(x)<0$$（由（2）的已知条件）

因此在$(0,1)$内，$\varphi(x)$单调减少，$\therefore x_0$是唯一的

例 4．求由曲线$y=x^2-2x$和直线$y=0$，$x=1$，$x=3$所围平面图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积。



解一：$\because y=x^2-2x$解出$x=1\pm\sqrt{1+y}$，$\therefore$

平面图形A_1绕y轴旋转一周所得旋转体体积

$$V_1=\pi\int_{-1}^0\left(1+\sqrt{1+y}\right)^2dy-\pi=\frac{11\pi}{6}$$

平面图形A_2绕y轴旋转一周所得旋转体体积

$$V_2=27\pi-\pi\int_0^3\left(1+\sqrt{1+y}\right)^2dy=\frac{43\pi}{6}$$

所求体积$V_y=V_1+V_2=9\pi$

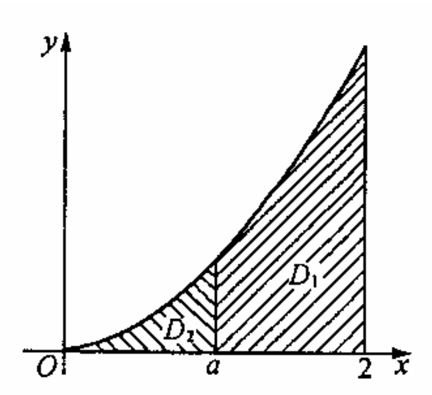
解二：$V_y=2\pi\int_1^3 x\left|x^2-2x\right|dx$

$$=2\pi\left[\int_1^2 x\left(2x-x^2\right)dx+\int_2^3 x\left(x^2-2x\right)dx\right]$$

$$=2\pi\left[\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2+\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_2^3\right]=9\pi$$

例 5．设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$，$x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$，$y=0$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$。（自己阅读）

（1）试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1；D_2 绕 y 轴而成的旋转体体积 V_2（如图）



（2）问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值

解：（1）$V_1=\pi\int_\alpha^2\left(2x^2\right)^2dx=\frac{4\pi}{5}\left(32-a^5\right)$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}dy=\pi a^4$$

或 $V_2=2\pi\int_0^a x\cdot 2x^2dx=\pi a^4$

（2）$V=V_1+V_2=\frac{4}{5}\pi\left(32-a^5\right)+\pi a^4$

由 $V'=4\pi a^3(1-a)=0$，

得区间 $(a,2)$ 内的唯一驻点 $a=1$。

又 $V''\Big|_{a=1}=-4\pi<0$，因此 $a=1$ 是极大值点，也是最大值点。此时 V_1+V_2 的最大值为 $\frac{129}{5}\pi$

二、物理和力学方面应用（数学一和数学二）（自己阅读）

例：为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口，已知井深 30m，抓斗自重 400N，缆绳每米重 50N，抓斗抓起污泥重 2000N，提升速度 3m/s，提升过程中污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升到井口，问克服重力需作多少焦耳的功？

说明：（1）$1N\times 1m=1J$；m，N，s，J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳。

（2）抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计。

解：所需作功 $W=W_1+W_2+W_3$

W_1 是克服抓斗自重所作的功 $W_1=400\times 30=12000$

W_2是克服缆绳重力作的功$W_2 = \int_0^{30} 50(30-x)dx = 22500$

W_3是提取污泥所作的功$W_3 = \int_0^{10} 3(2000-20t)dt = 57000$

所以$W = W_1 + W_2 + W_3 = 91500(J)$

三、经济方面应用（数学三和数学四）（自己阅读）

例 1．设某商品每天生产x单位时固定成本 40 元，边际成本函数为$C'(x) = 0.2x + 2$（元/单位），求总成本函数$C(x)$，最小平均成本。若该商品的销售单价为 20 元，且产品全部售出，问每天生产多少单位时才能获得最大利润，最大利润多少？

解：（1）$C'(x) = 0.2x + 2$，

$$C(x) = \int_0^x C'(t)dt + 40$$

$$= \int_0^x (0.2t + 2)dt + 40$$

$$= 0.1x^2 + 2x + 40$$

$$\overline{C}(x) = 0.1x + 2 + \frac{40}{x},$$

令 $\overline{C'}(x) = 0.1 - \frac{40}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 20$，$x_2 = -20$（舍去），

$$\overline{C''}(x)\Big|_{x_1 = 20} = \frac{80}{x^3}\Big|_{x_1 = 20} > 0,$$

故生产 20 单位时平均成本最小为$\overline{C}(20) = \left(0.1x + 2 + \frac{40}{x}\right)\Big|_{x = 20} = 6$。

（2）总收益 $R(x) = 20x$，

总利润 $L(x) = 20x - (0.1x^2 + 2x + 40)$

$$= (18x - 0.1x^2 - 40),$$

令 $L'(x) = 18 - 0.2x = 0 \Rightarrow x = 90$，

$L''(90) = -0.2 < 0$，

因此，每天生产 90 单位时，才能获得最大利润。

最大利润为$L(90) = (18x - 0.1x^2 - 40)\Big|_{x = 90} = 270$（元）

例 2．由于折旧等因素，某机器转售价格$P(t)$是时间t（周）的减函数$P(t) = \frac{3A}{4}e^{-\frac{t}{96}}$（元），其中 A 是机

器的最初价格。在任何时间t，机器开动就能产生$R=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}$的利润。问机器使用了多长时间后转售出去能使总利润最大？

解：假设机器使用了x周后出售，此时的售价为$P(x)=\frac{3A}{4}e^{-\frac{x}{96}}$，在这段时间内机器创造的利润是

$\int_0^x \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}dt$，购买机器的价格为 A。

所以，总利润$L(x)=\frac{3A}{4}e^{-\frac{x}{96}}+\int_0^x \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}dt-A$，

令 $L'(x)=0$，得出$x=96\ln 32\approx 333$，$L''(96\ln 32)<0$，所以，机器使用了大约333 周后转售出去会使总利润最大。

例 3．假设当鱼塘中有x公斤鱼时，每公斤鱼的捕捞成本是$\frac{2000}{10+x}$元，已知鱼塘中现有鱼$10000kg$，问从鱼塘中捕捞$6000kg$鱼需花费多少成本？

解：设已经捕捞了x公斤鱼，此时鱼塘中有$10000-xkg$鱼，再捕捞Δxkg鱼的成本为

$$\Delta C=\frac{2000}{10+(10000-x)}\Delta x,$$

所以，捕捞 6000 公斤鱼的成本为

$$C=\int_0^{6000}\frac{2000}{10+(10000-x)}dx=2000\ln\frac{10010}{4010}\approx 1829.59\text{（元）。}$$

第四章　常微分方程

§4．1　基本概念和一阶微分方程

（甲）内容要点

一、基本概念

1．常微分方程和阶

2．解、通解和特解

3．初始条件

4．齐次线性方程和非齐次线性方程

例 1．$y''+3xy'+e^x y=\sin x$为二阶、线性、非齐次方程，如果要求$y(0)=1, y'(0)=0$，这就是初始条件，从而得到特解。

例 2．$yy''+(y')^2+\sin y=e^x$为二阶非线性方程

二、变量可分离方程及其推广

1．$\frac{dy}{dx}=p(x)Q(y) \qquad (Q(y)\neq 0)$

$$\int \frac{dy}{Q(y)}=\int p(x)dx+C$$

2．齐次方程：$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$

令 $\frac{y}{x}=u,$ 则 $y=xu, \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$ 代入后得 $u+x\frac{du}{dx}=f(u)$，则 $\int \frac{du}{f(u)-u}=\int \frac{dx}{x}+C=\ln|x|+C$

三、一阶线性方程及其推广

1．$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

通解 $y=e^{-\int p(x)dx}[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]$

2．$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha} \qquad (\alpha\neq 0,1)$

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dy^{1-\alpha}}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$$

令 $y^{1-\alpha}=z$ 则为一阶线性方程

四、全微分方程及其推广（数学一）

1．$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

2．$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，$\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$ 但存在 $R(x,y)$，使 $\frac{\partial(RQ)}{\partial x}=\frac{\partial(RP)}{\partial y}$

五、差分方程（数学三）

（乙）典型例题

例 1．求 $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$ 的通解。

例 2．求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^4}$ 的通解

例 3．设 $y=e^x$ 是 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足 $y\big|_{x=\ln 2}=0$ 的特解

例 4．设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，且 $f(0)=0$，$f(x)+g(x)=2e^x$

（1）求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程

（2）求出 $F(x)$ 的表达式

例 5．求微分方程 $(y-x)\sqrt{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}=\left(1+y^2\right)^{3/2}$ 的通解

例 6．设 $f(x)$ 连续，$f(x)=\sin x-\int_0^x f(t)dt$，求 $f(x)$

§4．3　微分方程的应用

一、微分方程在几何问题方面的应用

例 1．　求通过 $(3,0)$ 的曲线方程，使曲线上任意点处切线与 y 轴之交点与切点的距离等于此交点与原点的距离。

例 2．　设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，若曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1$，$x=t(t>1)$ 与 x 轴围成平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(t)=\dfrac{\pi}{3}\left[t^2 f(t)-f(1)\right]$，试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求 $y\Big|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$ 的解。

二、其它应用（略）

§4．2　特殊的高阶微分方程（数学四不要）

（甲）内容要点

一、可降阶的高阶微分方程

方程类型	解法及解的表达式
$y^{(n)}=f(x)$	通解 $y=\underbrace{\int\cdots\int}_{n次} f(x)(dx)^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_{n-1}x+C_n$
$y''=f(x,y')$	令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程 $\Rightarrow$ $p'=f(x,p)$——一阶方程，设其解为 $p=g(x,C_1)$， 即 $y'=g(x,C_1)$，则原方程的通解为 $y=\int g(x,C_1)dx+C_2$
$y''=f(y,y')$	令 $y'=p$，把 p 看作 y 的函数，则 $y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$ 把 y',y'' 的表达式代入原方程， 得 $\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{1}{p}f(y,p)$——一阶方程， 设其解为 $p=g(y,C_1)$，即 $\dfrac{dy}{dx}=g(y,C_1)$，则原方程的通解为 $\int\dfrac{dy}{g(y,C_1)}=x+C_2$

二、线性微分方程解的性质与结构

我们讨论二阶线性微分方程解的性质与结构，其结论很容易地推广到更高阶的线性微分方程。

二阶齐次线性方程　　$y''+p(x)y'+q(x)y=0$　　（1）

二阶非齐次线性方程　　$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$　　（2）

1．若 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 为二阶齐次线性方程的两个特解，则它们的线性组合 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$（C_1,C_2 为任意常数）仍为同方程的解，特别地，当 $y_1(x)\neq\lambda y_2(x)$（λ 为常数），也即 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关时，则方程的通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$。

2．若 $\bar{y}(x)$ 为二阶非齐次线性方程的一个特解，而 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 为对应的二阶齐次线性方程的通解（C_1,C_2 为独立的任意常数）则 $y=\bar{y}(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是此二阶非齐次线性方程的通解。

3．设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 分别是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$ 与

$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$ 的特解，则 $y_1(x)+y_2(x)$ 是

$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解

三、二阶常系数齐次线性方程

$y''+py'+qy=0$，　p,q 为常数

特征方程　　$\lambda^2+p\lambda+q=0$

特征方程根的三种不同情形对应方程通解的三种形式

（1）当 $\Delta=p^2-4q>0$，特征方程有两个不同的实根 λ_1,λ_2

则方程的通解为　　$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

（2）当 $\Delta=p^2-4q=0$，特征方程有二重根 $\lambda_1=\lambda_2$，

则方程的通解为　　$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}$

（3）当 $\Delta=p^2-4q<0$，特征方程有共轭复根 $\alpha\pm i\beta$，

则方程的通解为　　$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

四、二阶常系数非齐次线性方程

方程　　$y''+py'+qy=f(x)$　　其中 p,q 为常数

通解　　$y=\bar{y}+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$

其中 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 为对应二阶常系数齐次线性方程的通解上面已经讨论。所以关键要讨论二阶常系数非齐次线性方程的一个特解 $\bar{y}$ 如何求？

我们根据 $f(x)$ 的形式，先确定特解 $\overline{y}$ 的形式，其中包含一些待定的系数，然后代入方程确定这些系数就得到特解 $\overline{y}$，常见的 $f(x)$ 的形式和相对应地 $\overline{y}$ 的形式如下：

1. $f(x)=p_n(x)$，其中 $p_n(x)$ 为 n 次多项式

（1）若 0 不是特征根，则令 $\overline{y}=R_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

其中 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 为待定系数。

（2）若 0 是特征方程的单根，则令 $\overline{y}=xR_n(x)$

（3）若 0 是特征方程的重根，则令 $\overline{y}=x^2R_n(x)$

2. $f(x)=p_n(x)e^{\alpha x}$ 其中 $p_n(x)$ 为 n 次多项式，α 为实常数

（1）若 α 不是特征根，则令 $\overline{y}=R_n(x)e^{\alpha x}$

（2）若 α 是特征方程单根，则令 $\overline{y}=xR_n(x)e^{\alpha x}$

（3）若 α 是特征方程的重根，则令 $\overline{y}=x^2R_n(x)e^{\alpha x}$

3. $f(x)=p_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 或 $f(x)=p_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$

其中 $p_n(x)$ 为 n 次多项式，α,β 皆为实常数

（1）若 $\alpha\pm i\beta$ 不是特征根，则令 $\overline{y}=e^{\alpha x}[R_n(x)\cos\beta x+T_n(x)\sin\beta x]$

其中 $R_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为待定系数

$T_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$

$b_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为待定系数

（2）若 $\alpha\pm i\beta$ 是特征根，则令 $\overline{y}=xe^{\alpha x}[R_n(x)\cos\beta x+T_n(x)\sin\beta x]$

五、欧拉方程（数学一）

$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=0$，其中 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数称为 n 阶欧拉方程，令 $x=e^t$ 代入方程，变为 t 是自变量，y 是未知函数的微分方程一定是常系数齐次线性微分方程

（乙）典型例题

例 1. 求 $(1+x)y''+y'=\ln(x+1)$ 的通解

解：令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化为

$$(x+1)p' + p = \ln(x+1)$$

$$p' + \frac{1}{x+1}p = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$ 属于一阶线性方程

$$p = e^{-\int\frac{1}{x+1}dx}\left[\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}e^{\int\frac{1}{x+1}dx}dx + C_1\right]$$

$$= \frac{1}{x+1}\left[\int\ln(x+1)dx + C_1\right] = \ln(x+1) - 1 + \frac{C_1}{x+1}$$

$$y = \int\left[\ln(x+1) - 1 + \frac{C_1}{x+1}\right]dx + C_2$$

$$= (x+C_1)\ln(x+1) - 2x + C_2$$

例 2．求下列微分方程的通解

$$yy'' - (y')^2 + 1 = 0$$

解：

令 $y' = p$，则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，原方程化为

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 - 1$$

$$\int\frac{pdp}{p^2-1} = \int\frac{dy}{y} + C_1'$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|p^2 - 1\right| = \ln|y| + C_1'$$

$$p = \pm\sqrt{1+C_1y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1+C_1y^2}$$

当 $C_1 > 0$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left(\sqrt{C_1}y + \sqrt{1+C_1y^2}\right) = \pm x + C_2$

当 $C_1 < 0$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{1-C_1}}\arcsin\left(\sqrt{-C_1}y\right) = \pm x + C_2$

例 3．求 $y'' + 2y' - 3y = 2e^x$ 的通解

解：

先求相应齐次方程 $y'' + 2y' - 3y = 0$ 的通解，其特征方程为

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

特征根为 $\lambda_1 = -3$，$\lambda_2 = 1$，因此齐次方程通解为

$$Y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$$

设非齐次方程的特解为 $\bar{y}$，由于 $\alpha=1$ 为特征根，因此设 $\bar{y}=xAe^{x}$，代入原方程可得 $A=\dfrac{1}{2}$，故原方程的通解为

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}+\frac{1}{2}xe^{x}$$

例 4．求方程 $y''+y'-2y=2\cos 2x$ 的通解

特征根为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，因此齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$$

设非齐次方程的特解为 $\bar{y}$，由于题目中 $\alpha=0$，$\beta=2$，$\alpha+i\beta=2i$ 不是特征根，因此设 $\bar{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$，代入原方程可得

$$(-2A+2B-4A)\cos 2x+(-2B-2A-4B)\sin 2x=2\cos 2x$$

$$\begin{cases}-6A+2B=2\\-6B-2A=0\end{cases}$$

解联立方程得 $A=-\dfrac{3}{10}$，$B=\dfrac{1}{10}$，因此

$$\bar{y}=-\frac{3}{10}\cos 2x+\frac{1}{10}\sin 2x$$

故原方程的通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}-\frac{3}{10}\cos 2x+\frac{1}{10}\sin 2x$$

例 5．解 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^{x}$

例 6．设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数。

（1）试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

（2）求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解。

例 7．设 $f(x)=x\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，其中 $f(x)$ 连续，求 $f(x)$

例 8． 已知 $y_1=xe^{x}+e^{2x}$，$y_2=xe^{x}+e^{-x}$，$y_3=xe^{x}+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次常系数微分方程的三个解，求此微分方程及其通解。

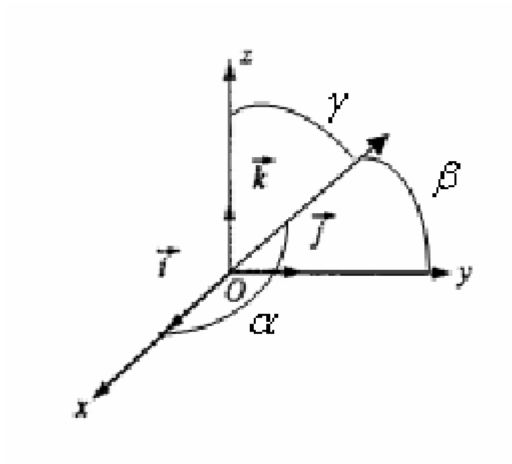
第五章　向量代数与空间解析几何

§5.1　向量代数

（甲）内容要点

一、空间直角坐标系

二、向量概念



$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

坐标(x, y, z)

模$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

方向角α, β, γ

方向余弦$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

三、向量运算

设$\vec{a}(x_1, y_1, z_1); \vec{b}(x_2, y_2, z_2); \vec{c}(x_3, y_3, z_3)$

1．加（减）法　$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$

2．数乘　$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

3．数量积（点乘）（i）定义$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos_{\angle}(\vec{a}, \vec{b})$

（ii）坐标公式$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

（iii）重要应用$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

4．向量积（叉乘）（i）定义 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin_{\angle}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

$\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 皆垂直，且 $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 构成右手系

（ii）坐标公式 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$

（iii）重要应用 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ 共线

5．混合积（i）定义 $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

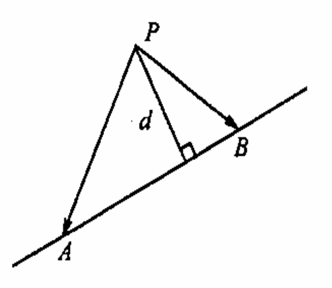
（ii）坐标公式 $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$

（iii）$\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$ 表示以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积

口诀（36)：点乘为零判垂直；叉乘为零是平行；混合积为零共面；体积就加绝对值。

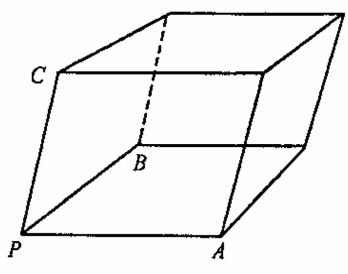
（乙）典型例题

例 1．点 P 到过 A,B 的直线之间的距离



$$d=\frac{\left|\vec{P}A\times\vec{P}B\right|}{\left|\vec{A}B\right|}$$

例 2．点 P 到 A,B,C 所在平面的距离



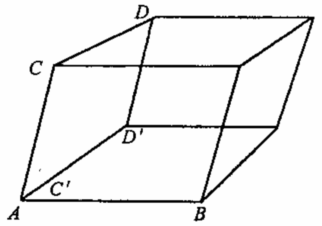
$$d=\frac{\left|\left(\vec{P}A,\vec{P}B,\vec{P}C\right)\right|}{\left|\vec{A}B\times\vec{A}C\right|}$$

因为四面体 $PABC$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}d\cdot S_{\Delta ABC}$

而 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{A}B\times\vec{A}C\right|$

又$V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{P}A,\vec{P}B,\vec{P}C\right)\right|$

例 3．过点A,B与过点C,D的异面直线之间的距离



$$d=\frac{\left|\left(\vec{A}C,\vec{A}B,\vec{C}D\right)\right|}{\left|\vec{A}B\times\vec{C}D\right|}$$

因为$\vec{C}D=\vec{C}'D'$

$$d=\frac{\text{平行六面体体积}}{\text{平行四边形面积}}$$

§5.2　平面与直线

（甲）内容要点

一、空间解析几何

1．空间解析几何研究的基本问题。

（1）已知曲面（线）作为点的几何轨迹，建立这曲面（线）的方程，

（2）已知坐标x,y和z间的一个方程（组），研究这方程（组）所表示的曲面（线）。

2．距离公式　空间两点$A(x_1,y_1,z_1)$与$B(x_2,y_2,z_2)$间的距离d为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

3．定比分点公式$M(x,y,z)$是AB的分点：$\frac{AM}{MB}=\lambda$，点A,B的坐标为$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

当M为中点时，

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

二、平面及其方程

1．法（线）向量，法（线）方向数。

与平面π垂直的非零向量，称为平面π的法向量，通常记成$\vec{n}$。法向量$\{m,n,p\}$的坐标称为法（线）方向数。对于给定的平面π，它的法向量有无穷多个，但它所指的方向只有两个。

2．点法式方程　已知平面π过$M(x_0,y_0,z_0)$点，其法向量$\vec{n}=\{A,B,C\}$，则平面π的方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

或 $\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$

其中 $\vec{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\},\vec{r}=\{x,y,z\}$

3．一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中 A,B,C 不全为零。x,y,z 前的系数表示 π 的法线方向数，$\bar{n}=\{A,B,C\}$ 是 π 的法向量特别情形：

$Ax+By+Cz=0$，表示通过原点的平面。

$Ax+By+D=0$，平行于 z 轴的平面。

$Ax+D=0$，平行 yOz 平面的平面。

$x=0$ 表示 yOz 平面。

4．三点式方程　设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$ 三点不在一条直线上。则通过 A,B,C 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

5．平面束　设直线 L 的一般式方程为 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$，则通过 L 的所有平面方程为

$K_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+K_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$，其中 $(k_1,k_2)\neq(0,0)$

6．有关平面的问题

两平面为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad \text{法向量} \quad \vec{n}_1(A_1,B_1,C_1)$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad \vec{n}_2(A_2,B_2,C_2)$$

π_1 与 π_2 间夹角 (φ) （就是 $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 之间夹角）	$\cos\varphi\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ （即 $\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}$）
垂直条件	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
平行条件	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\left(\neq\dfrac{D_1}{D_2}\right)$
重合条件	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

7．设平面π的方程为$Ax+By+Cz+D=0$，而点$M\left(x_1,y_1,z_1\right)$为平面$\pi$外的一点，则$M$到平面$\pi$的距离$d$：

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

三、直线及其方程

1．方向向量、方向数

与直线平行的非零向量$\vec{S}$，称为直线L的方向向量。方向向量的坐标称为方向数。

2．直线的标准方程（对称式方程）。

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

其中$\left(x_0,y_0,z_0\right)$为直线上的点，l,m,n为直线的方向数。

3．参数式方程：

$$\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{cases}$$

4．两点式

设$A\left(x_1,y_1,z_1\right)$，$B\left(x_2,y_2,z_2\right)$为不同的两点，则通过$A$和$B$的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

5．一般式方程（作为两平面的交线）：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

$$\vec{S}=\left\{A_1,B_1,C_1\right\}\times\left\{A_2,B_2,C_2\right\}$$

6．有关直线的问题

两直线为

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\quad 方向向量\ \vec{S}_1(l_1,m_1,n_1)$$

$$L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}\quad \vec{S}_2(l_2,m_2,n_2)$$

l_1与l_2间夹角$\left(\theta\right)$ （就是$\vec{S}_1$与$\vec{S}_2$之间夹角）	$\cos\theta=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$ （即$\dfrac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{\left\|\vec{S}_1\right\|\left\|\vec{S}_2\right\|}$）
垂直条件	$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

平行条件	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

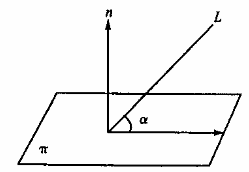
四、平面与直线相互关系

平面π的方程为：

$$Ax+By+Cz+D=0 \,| \qquad \text{法向量}\ \vec{n}(A,B,C)$$

直线L的方程为：

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\ \text{方向向量}\ \vec{S}(l,m,n)$$



L与π间夹角(α)	$\sin\alpha=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ （$=\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot\vec{S}}{\lvert\vec{n}\rvert\lvert\vec{S}\rvert}$）
L与π垂直条件	$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$
L与π平行条件	$Al+Bm+Cn=0$
L与π重合条件	$Al+Bm+Cn=0$ L上有一点在π上

（乙）典型例题

例 1．求通过$M_0(1,-1,2)$和直线$l:\begin{cases}x-y-z+1=0\\2x+y+z-5=0\end{cases}$的平面方程。

例 2．求过直线$\begin{cases}x+y-2z+3=0\\2x-y+z=0\end{cases}$且切于球面$x^2+y^2+z^2=1$的平面

§5.3　曲面与空间曲线

（甲）内容要点

一、曲面方程

1．一般方程　　$F(x,y,z)=0$

2．参数方程　　$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$　　$(u,v)\in D$（平面区域）

二、空间曲线方程

1．一般方程 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$

2．参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

三、常见的曲面方程

1．球面方程

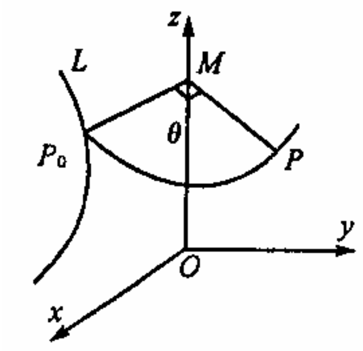
设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是球心，R 是半径，$P(x,y,z)$ 是球面上任意一点，则 $\left|\overrightarrow{P_0P}\right|=R$，即 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$。

2．旋转曲面的方程

（i）设 L 是 xOz 平面上一条曲线，其方程是 $\begin{cases} f(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$ L 绕 z 轴旋转得到旋转曲面，设 $P(x,y,z)$ 是旋转面上任一点，由点 $P_0(x_0,0,z_0)$ 旋转而来（点 $M(0,0,z)$ 是圆心）。

由 $|x_0|=\left|\overrightarrow{MP_0}\right|=\left|\overrightarrow{MP}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$，$z_0=z$ 得旋转面方程是

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0；$$



（ii）求空间曲线 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 绕 z 轴一周得旋转曲面的方程

第一步：从上面联立方程解出 $x=f(z)$，$y=g(z)$

第二步：旋转曲面方程为 $x^2+y^2=f^2(z)+g^2(z)$

绕 y 轴一周或绕 x 轴一周的旋转曲面方程类似地处理

3．二次曲面

曲面名称	方　　程	曲面名称	方　　程
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	旋转抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z(p>0)$

椭圆抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$	双曲抛物面	$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
二次锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	抛物柱面	$\frac{x^2}{2p}=y(p>0)$

四、空间曲线在坐标平面上的投影

曲线C的方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

曲线C在xy平面上的投影

先从曲线C的方程中消去Z得到$H(x,y)=0$，它表示曲线C为准线，母线平行于Z轴的柱面方程，那么

$$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$$

就是C在xy平面上的投影曲线方程

曲线C在zx平面上投影或在yz平面上投影类似地处理

（乙）典型例题

例 1．求以点$A(0,0,1)$为顶点，以椭圆$\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\\z=3,\end{cases}$，为准线的锥面方程。

例 2．求旋转抛物面$z=x^2+y^2$与平面$y+z=1$的交线在xy平面上投影方程

例 3．求直线$L:\begin{cases}x=1-2t\\y=3+t\\z=2-3t\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影；

例 4．求直线$L:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$在平面$\pi:x-y+2z-1=0$上的投影直线$L_0$的方程，并求$L_0$绕$y$轴一周所成曲面的方程。

第六章　多元函数微分学

§6.1　多元函数的概念、极限与连续性

（甲）内容要点

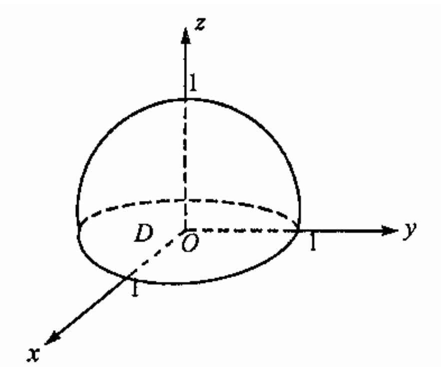
一、多元函数的概念

1．二元函数的定义及其几何意义

设D是平面上的一个点集，如果对每个点$P(x,y)\in D$，按照某一对应规则f，变量z 都有一个值与之对应，则称z是变量x，y的二元函数，记以$z=f(x,y)$，D称为定义域。

二元函数$z=f(x,y)$的图形为空间一块曲面，它在xy平面上的投影域就是定义域D。

例如$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$D: x^2+y^2\le 1$二元函数的图形为以原点为球心，半径为 1 的上半球面，其定义域D就是xy平面上以原点为圆心，半径为 1 的闭圆。



2．三元函数与n元函数

$u=f(x,y,z)$，$(x,y,z)\in\Omega$空间一个点集，称为三元函数

$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为n元函数。

它们的几何意义不再讨论，在偏导数和全微分中会用到三元函数。条件极值中，可能会遇到超过三个自变量的多元函数。

二、二元函数的极限

设$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的领域内有定义，如果对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$，就有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$

则记以$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$或$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$

称当(x,y)趋于(x_0,y_0)时，$f(x,y)$的极限存在，极限值为A。否则，称为极限不存在。

值得注意：这里(x,y)趋于(x_0,y_0)是在平面范围内，可以按任何方式沿任意曲线趋于(x_0,y_0)，所以二元函数的极限比一元函数的极限复杂，但考试大纲只要求知道基本概念和简单的讨论极限存在性和计算极限值不象一元函数求极限要求掌握各种方法和技巧。

三、二元函数的连续性

1．二元函数连续的概念

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

若 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点皆连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 内连续。

2．闭区域上连续函数的性质

定理 1 （有界性定理）设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上一定有界

定理 2 （最大值最小值定理）设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上一定有最大值和最小值

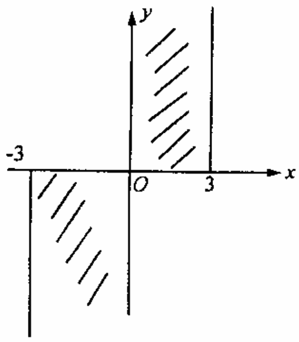
$\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=M$ （最大值）， $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)=m$（最小值）

定理 3 （介值定理）设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，M 为最大值，m 为最小值，若 $m\le c\le M$，则存在 $(x_0,y_0)\in D$，使得 $f(x_0,y_0)=C$

（乙）典型例题

一、求二元函数的定义域 （自己阅读）

例 1．求函数 $z=\arcsin\dfrac{x}{3}+\sqrt{xy}$ 的定义域

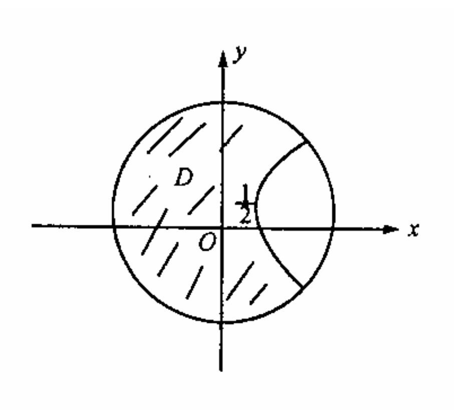


解：要求 $\left|\dfrac{x}{3}\right|\le 1$ 即 $-3\le x\le 3$；

又要求 $xy\ge 0$ 即 $x\ge 0$， $y\ge 0$ 或 $x\le 0$， $y\le 0$ 综合上述要求得定义域

$$\begin{cases}-3\le x\le 0\\ y\le 0\end{cases} \text{或} \begin{cases}0\le x\le 3\\ y\ge 0\end{cases}$$

例 2．求函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln\left(y^2-2x+1\right)$的定义域



解：要求 $4-x^2-y^2\geq 0$ 和 $y^2-2x+1>0$

即 $\begin{cases} x^2+y^2\leq 2^2 \\ y^2+1>2x \end{cases}$

函数定义域 D 在圆 $x^2+y^2\leq 2^2$ 的内部（包括边界）和抛物线 $y^2+1=2x$ 的左侧（不包括抛物线上的点）

二、有关二元复合函数　　（自己阅读）

例 1．设 $f\left(x+y,x-y\right)=x^2y+y^2$，求 $f\left(x,y\right)$

解：设 $x+y=u$， $x-y=v$ 解出 $x=\frac{1}{2}\left(u+v\right)$， $y=\frac{1}{2}\left(u-v\right)$

代入所给函数化简 $f\left(u,v\right)=\frac{1}{8}\left(u+v\right)^2\left(u-v\right)+\frac{1}{4}\left(u-v\right)^2$

故 $f\left(x,y\right)=\frac{1}{8}\left(x+y\right)^2\left(x-y\right)+\frac{1}{4}\left(x-y\right)^2$

例 2．设 $f\left(x+y,xy\right)=x^2+3xy+y^2+5$，求 $f\left(x,y\right)$

解：$\because x^2+3xy+y^2+5=\left(x^2+2xy+y^2\right)+xy+5$

$$=\left(x+y\right)^2+xy+5$$

$\therefore f\left(x,y\right)=x^2+y+5$

例 3．设 $z=\sqrt{y}+f\left(\sqrt{x}-1\right)$，当 $y=1$ 时， $z=x$，求函数 f 和 z

解：由条件可知

$x=1+f\left(\sqrt{x}-1\right)$，令 $\sqrt{x}-1=u$，

则 $f\left(u\right)=x-1=\left(u+1\right)^2-1=u^2+2$

$\therefore f\left(x\right)=x^2+2x$， $z=\sqrt{y}+x-1$

三、有关二元函数的极限

例 1．讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$　　（$a\neq 0$ 常数）

解：原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to a}}\left[\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{x^2}{xy(x+y)}}$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy} \xlongequal{\text{令}t=xy} \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$

又 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to a}}\frac{x^2}{xy(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to a}}\frac{1}{y\left(1+\frac{y}{x}\right)}=\frac{1}{a}$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{1}{a}}$

例 2．讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

解：沿 $y=lx$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{lx^3}{x^4+l^2x^2}=0$

沿 $y=lx^2$，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{lx^4}{x^4+l^2x^4}=\frac{l}{1+l^2}$

$\therefore$ 原式的极限不存在

例 3．讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\frac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$

解：$\because x^4+y^2\geq 2x^2|y|$　　（$\because \left(x^2-|y|\right)^2\geq 0$）

$\therefore 0\leq\frac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}\leq\frac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{2x^2|y|}=\frac{1}{2}|y|^{\frac{1}{2}}$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\frac{1}{2}|y|^{\frac{1}{2}}=0$；　　$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}0=0$

用夹逼定理可知　原式 $=0$

§6.2　偏导数与全微分

（甲）内容要点

一、偏导数与全微分的概念

1．偏导数

二元：设 $z=f(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

例：$z=3x^2y^3-\sin x$，　$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^3-\cos x$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=9x^2y^2$

三元：设 $u=f(x,y,z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x'(x,y,z)；$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_y'(x,y,z)；$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_z'(x,y,z)$$

2．二元函数的二阶偏导数

设 $z=f(x,y)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}''(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}''(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

当二阶偏导数连续时，$f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y)$

3．全微分

设 $z=f(x,y)$，增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

若 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$

当 $\Delta x\to 0$　$\Delta y\to 0$ 时

则称 $z=f(x,y)$ 可微，而全微分 $dz=A\Delta x+B\Delta y$

定义：$dx=\Delta x$，　　$dy=\Delta y$

定理：可微情况下，$A=f_x'(x,y)$，$B=f_y'(x,y)$

$$\therefore dz=f_x'(x,y)dx+f_y'(x,y)dy$$

三元函数$u=f(x,y,z)$

全微分$du=f'_x(x,y,z)dx+f'_y(x,y,z)dy+f'_z(x,y,z)dz$

4．相互关系

$$\left.\begin{matrix}f'_x(x,y)\\ f'_y(x,y)\end{matrix}\right.\text{连续}\Rightarrow df(x,y)\text{存在}\begin{matrix}\Rightarrow & f'_x(x,y),f'_y(x,y)\text{存在}\\ \Rightarrow & f(x,y)\text{连续}\end{matrix}$$

例：函数$f(x,y)$有偏导数是$f(x,y)$连续的（ ）条件

（A）充分　　（B）必要　　（C）充分必要　　（D）无关

5．方向导数与梯度（数学一）

二、复合函数微分法——锁链公式

模型 I：设$z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$

则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

模型 II：设$u=f(x,y,z)$，$z=z(x,y)$，

则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_x+f'_z\dfrac{\partial z}{\partial x}$　　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'_y+f'_z\dfrac{\partial z}{\partial y}$

模型 III：设$u=f(x,y,z)$，$y=y(x)$，$z=z(x)$

则$\dfrac{du}{dx}=f'_x+f'_y y'(x)+f'_z z'(x)$

口诀（38）：多元复合求偏导；锁链公式不可忘。

思考题：设$z=f(u,v,w)$，$w=w(u,v)$，$u=u(t)$，$v=v(t)$，$t=t(x,y)$

求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$的锁链公式和图

三、隐函数微分法

设$F(x,y,z)=0$，确定$z=z(x,y)$

则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$（要求偏导数连续且$F'_z\neq 0$）

口诀（39）：多元隐函求偏导，交叉偏导加负号。

四、几何应用（数学一）

1．空间曲面上一点处的切平面和法线

2．空间曲线上一点处的切线和法平面

（乙）典型例题

例 1．求 $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{z}$ 的偏导数

例 2．设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定

$e^{xy}-xy=2$ 和 $e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\frac{du}{dx}$

例 3．设 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 是由 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 具有一阶连续导数，F 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{dz}{dx}$

解：分别在两方程两边对 x 求导得

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=f+x\left[1+\frac{dy}{dx}\right]f'\\ F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}+F'_z\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

化简 $\begin{cases}-xf'\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=f+xf'\\ F'_y+\frac{dy}{dx}+F'_z\frac{dz}{dx}=-F'_x\end{cases}$

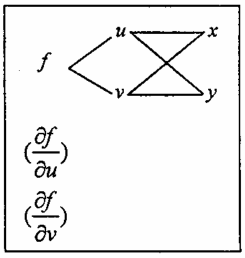
解出 $\frac{dz}{dx}=\frac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z}$

例 4．设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$z=z(x,y)$ 由方程

$xe^{x}-ye^{y}=ze^{z}$ 所确定，求 du

例 5．设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，

$g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)\right]$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$



解：$u=xy$，$v=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$

$\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}$，$\frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y\frac{\partial\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}+x\frac{\partial\left[\frac{\partial f}{\partial v}\right]}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial\left[\frac{\partial f}{\partial v}\right]}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

故：$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

所以：$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=x^2+y^2$

例 6．已知 $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$，确定 $z=z(x,y)$ 其中 $F(u,v)$， $z(x,y)$

均有连续偏导数，求证 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$

证： $F(u,v)=F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=G(x,y,z)=0$

$$G'_x=F'_u\cdot\frac{1}{z},\quad G'_y=F'_v\cdot\frac{1}{z},\quad G'_z=F'_u\left(-\frac{x}{z^2}\right)+F'_v\left(-\frac{y}{z^2}\right)$$

根据隐函数求导公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G'_x}{G'_z}=\frac{zF'_u}{xF'_u+yF'_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G'_y}{G'_z}=\frac{zF'_v}{xF'_u+yF'_v}$$

则得 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$

例 7．设 $\begin{cases}x=-u^2+v+z\\ y=u+vz\end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial z}$

分析：从方程组直接解 u 和 v，遇到二次项，比较繁，而从 du 和 dv 的方程组中都是一次项，比较容易求出 du 和 dv，另外从 du 和 dv 的表达式中同样可以看出有关的偏导数。

§ 6.3　多元函数的极值和最值

（甲）内容要点

一、求 $z = f(x,y)$ 的极值

第一步 $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$ 求出驻点 (x_k, y_k) $\quad (k = 1,2,\cdots,l)$

第二步 令 $\Delta_k = f''_{xx}(x_k,y_k) f''_{yy}(x_k,y_k) - \left[f''_{xy}(x_k,y_k)\right]^2$

若 $\Delta_k < 0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 不是极值

若 $\Delta_k = 0$ 则不能确定（有时需从极限定义出发讨论）

若 $\Delta_k > 0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 是极值

进一步 若 $f''_{xx}(x_k,y_k) > 0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 为极小值

若 $f''_{xx}(x_k,y_k) < 0$ 则 $f(x_k,y_k)$ 为极大值

二、求多元 $(n \geq 2)$ 函数条件极值的拉格朗日乘子法

求 $u = f(x_1,\cdots,x_n)$ 的极值

约束条件 $\begin{cases} \varphi_1(x_1,\cdots,x_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ \varphi_m(x_1,\cdots,x_n) = 0 \end{cases} \quad (m < n)$

令 $F = F(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m) = f(x_1,\cdots,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1,\cdots,x_n)$

$$\begin{cases} F'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ F'_{x_n} = 0 \\ F'_{\lambda_1} = \varphi_1(x_1,\cdots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ F'_{\lambda_m} = \varphi_m(x_1,\cdots,x_n) = 0 \end{cases}$$

求出 $\left(x_1^k,\cdots,x_n^k\right)$ $(k = 1,2,\cdots,l)$ 是有可能的条件极值点，一般再由实际问题的含义确定其充分性，这种方法关键是解方程组的有关技巧。

三、多元函数的最值问题（略）

（乙）典型例题

一、普通极值

例 1．求函数 $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 的极值

例 2．设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。

分析：隐函数求极值的方法与显函数求极值类似。第一步求出驻点（需要计算一阶偏导数），第二步作判别式（需要计算二阶偏导数），但隐函数求一阶和二阶偏导数在计算上复杂多了。

解：

因为 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$

每一项对 x 求导，z 看作 x,y 的函数，得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad (1)$$

每一项对 y 求导，z 看作 x,y 的函数，得

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0。 \qquad (2)$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得

$\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$

把（1）的每一项再对 x 求导，z 和 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 看作 x,y 的函数，得

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

把（1）的每一项再对 y 求导，z 和 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 看作 x,y 的函数，得

$$-6-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

把（2）的每一项再对 y 求导，z 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 看作 x,y 的函数，得

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

所以 $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\dfrac{1}{6}$，$B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\dfrac{1}{2}$，$C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\dfrac{5}{3}$，

故 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$，又 $A=\dfrac{1}{6}>0$，从而点 $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$。

类似地，由

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{6},$$

$$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{2},$$

$$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=\frac{5}{3},$$

可知 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=-\frac{1}{6}<0$，所以点 $(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$。

二、条件极值问题

例 1．在椭球面 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}=1$ 第一卦限上 P 点处作切平面，使与三个坐标平面所围四面体的体积最小，求 P 点坐标。

解：

设 P 点坐标 (x,y,z)，则椭球面在 P 点的切平面的法向量为 $\left(\frac{2x}{5^2},\frac{2y}{3^2},\frac{2z}{2^2}\right)$

切平面：$\frac{2}{25}x(X-x)+\frac{2}{9}y(Y-y)+\frac{1}{2}z(Z-z)=0$

$$\frac{2}{25}xX+\frac{2}{9}yY+\frac{1}{2}zZ-2\left(\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}\right)=0$$

$$\frac{2}{25}xX+\frac{2}{9}yY+\frac{1}{2}zZ-2=0$$

x 轴截距 $(Y=0,Z=0)$　　$X=\frac{25}{x}$

y 轴截距 $(Z=0,X=0)$　　$Y=\frac{9}{y}$

z 轴截距 $(X=0,Y=0)$　　$Z=\frac{4}{z}$ 所以四面体的体积

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{x}\cdot\frac{9}{y}\cdot\frac{4}{z}=\frac{150}{xyz}$$

约束条件 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}-1=0$　$(x>0,y>0,z>0)$ 用拉格朗日乘子法，令

$$F=F(x,y,z,\lambda)=\frac{150}{xyz}+\lambda\left(\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}-1\right)$$

$$F'_x=-\frac{150}{x^2yz}+\frac{2\lambda}{25}x=0 \qquad (1)$$

$$F'_y=-\frac{150}{xy^2z}+\frac{2\lambda}{9}y=0 \qquad (2)$$

$$F_z' = -\frac{150}{xyz^2} + \frac{2\lambda}{4}z = 0 \qquad (3)$$

$$F_\lambda' = \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} - 1 \qquad (4)$$

用 x 乘（1）$+y$ 乘（2）$+z$ 乘（3） 得 $-\frac{450}{xyz} + 2\lambda = 0$

则 $2\lambda = \frac{450}{xyz}$ （5）

将（5）分别代入（1），（2），（3）得

$$x = \frac{5}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{3}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

所以 P 点坐标为 $\left(\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 而最小体积 $V = 15\sqrt{3}$

例 2．求坐标原点到曲线 $C:\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$ 的最短距离。

解：

设曲线 C 上点 (x, y, z) 到坐标原点的距离为 d，令 $W = d^2 = x^2 + y^2 + z^2$，约束条件 $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$，$2x - y - z - 1 = 0$ 用拉格朗日乘子法，令

$$F = F(x, y, z, \lambda, \mu) = (x^2 + y^2 + z^2) + \lambda(x^2 + y^2 - z^2 - 1) + \mu(2x - y - z - 1)$$

$$F_x' = 2x + 2\lambda x + 2\mu = 0 \qquad (1)$$

$$F_y' = 2y + 2\lambda x - \mu = 0 \qquad (2)$$

$$F_z' = 2z - 2\lambda z - \mu = 0 \qquad (3)$$

$$F_\lambda' = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \qquad (4)$$

$$F_\mu' = 2x - y - z - 1 = 0 \qquad (5)$$

首先，由（1），（2）可见，如果取 $\lambda = -1$，则 $\mu = 0$，由（3）可知 $z = 0$，再由（4），（5）得 $x^2 + y^2 - 1 = 0$，$2x - y - 1 = 0$

解得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$

这样得到两个驻点 $P_1(0,-1,0)$，$P_2\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)$ 其次，如果取 $\lambda=1$，由（3）得 $\mu=0$，再由（1）（2）得 $x=0$，$y=0$ 这样（4）成为 $-z^2=1$，是矛盾的，所以这种情形设有驻点。

最后，讨论 $\lambda\neq 1$，$\lambda\neq -1$ 情形，由（1）（2），（3）可得

$x=-\dfrac{\mu}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{\mu}{2(1+\lambda)}$，$z=\dfrac{\mu}{1(1-\lambda)}$ 代入（4），（5）消去 μ 得 $3\lambda^2-9\lambda+8=0$ 此方程无解，所以这种情形也没有驻点。

综合上面讨论可知只有两个驻点，它们到坐标原点的距离都是 1，由实际问题一定有最短距离，可知最短距离为 1。

另外，由于 C 为双曲线，所以坐标原点到 C 的最大距离不存在。

例 3．已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$，并且 $f(1,1)=2$。求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1\right\}$ 上的最大值和最小值。

解法 1　由 $dz=2xdx-2ydy$ 可知

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+C,$$

再由 $f(1,1)=2$，得 $C=2$，故

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+2$$

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y=0$，解得驻点 $(0,0)$。

在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，$z=x^2-(4-4x^2)+2$，即

$$z=5x^2-2 \qquad (-1\leq x\leq 1),$$

其最大值为 $z\Big|_{x=\pm 1}=3$，最小值为 $z=\Big|_{x=0}=-2$，

再与 $f(0,0)=2$ 比较，可知 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3，最小值为 -2。

解法 2　同解法 1，得驻点 $(0,0)$。

用拉格朗日乘数法求此函数在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的极值。

设 $L=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\dfrac{y^2}{4}-1\right)$，

令 $$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = -2y + \dfrac{\lambda}{2} y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

解得4个可能的极值点$(0,2)$，$(0,-2)$，$(1,0)$和$(-1,0)$。

又 $f(0,2) = -2$， $f(0,-2) = -2$， $f(1,0) = 3$， $f(-1,0) = 3$，再与 $f(0,0) = 2$ 比较，得 $f(x,y)$在D上的最大值为3，最小值为-2。

第七章　多元函数积分学

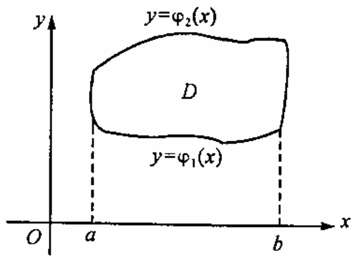
§7.1　二重积分

（甲）内容要点

一、在直角坐标系中化二重积分为累次积分以及交换积分顺序问题

口诀（40）：多重积分的计算，累次积分最关键。

模型 I：设有界闭区域

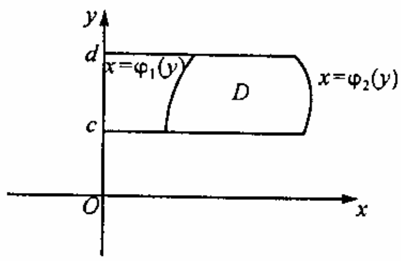


$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

其中$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$在$[a,b]$上连续， $f(x,y)$在D上连续，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

模型 II：设有界闭区域



$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d, \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$

其中$\varphi_1(y)$，$\varphi_2(y)$在$[c,d]$上连续， $f(x,y)$在D上连续

则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$

关于二重积分的计算主要根据模型 I 或模型 II，把二重积分化为累次积分从而进行计算，对于比较复杂的区域D如果既不符合模型 I 中关于D的要求，又不符合模型 II 中关于D的要求，那么就需要把D分解成一些小区域，使得每一个小区域能够符合模型 I 或模型 II 中关于区域的要求，利用二重积分性质，把大区域上二重积分等于这些小区域上二重积分之和，而每个小区域上的二重积分则可以化为累次积分进行计算。

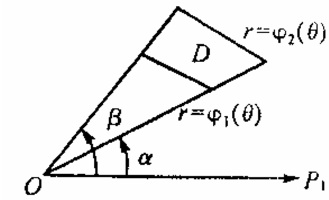
在直角坐标系中两种不同顺序的累次积分的互相转化是一种很重要的手段，具体做法是先把给定的累次积分反过来化为二重积分，求出它的积分区域D，然后根据D再把二重积分化为另外一种顺序的累次积分。

口诀（41）：交换积分的顺序，先要化为重积分。

二、在极坐标系中化二重积分为累次积分

在极坐标系中一般只考虑一种顺序的累次积分，也即先固定θ对γ进行积分，然后再对θ进行积分，由于区域D的不同类型，也有几种常用的模型。

模型 I　设有界闭区域



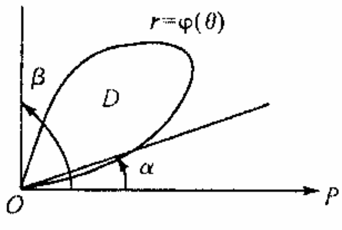
$$D = \{(\gamma,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, \varphi_1(\theta) \le \gamma \le \varphi_2(\theta)\}$$

其中$\varphi_1(\theta)$，$\varphi_2(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，$f(x,y) = f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$在$D$上连续。

则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma\, d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma$$

模型 II　设有界闭区域



$$D = \{(\gamma,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, 0 \le \gamma \le \varphi(\theta)\}$$

其中$\varphi(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，

$f(x,y) = f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)$在$D$上连续。

则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma\, d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(\gamma\cos\theta,\gamma\sin\theta)\gamma\, d\gamma$$

（乙）典型例题

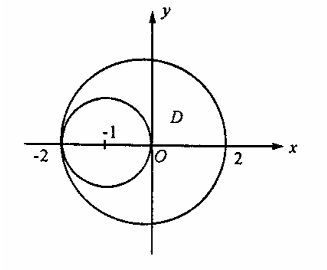
一、二重积分的计算

例 1．计算 $\iint\limits_{D} e^{-y^2}dxdy$，其中 D 由 $y=x$， $y=1$ 和 y 轴所围区域

例 2．计算 $\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\ 0\le y\le 2}} \sqrt{\left|y-x^2\right|}dxdy$

例 3．求 $I=\iint\limits_{D}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma$

$$D:\begin{array}{l} x^2+y^2\le 4\\ (x+1)^2+y^2\ge 1\end{array}$$



解一：$\iint\limits_{D}=\iint\limits_{D_{大圆}}-\iint\limits_{D_{小圆}}$

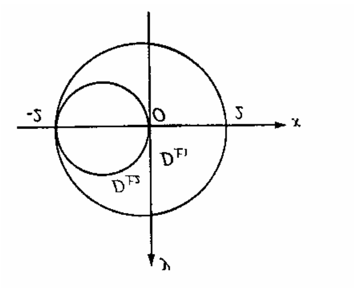
$$\iint\limits_{D_{大圆}}\left[\sqrt{x^2+y^2}+y\right]d\sigma=\iint\limits_{D_{大圆}}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+0\text{（对称性）}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2dr=\frac{16}{3}\pi$$

$$\iint\limits_{D_{小圆}}=\iint\limits_{D_{小圆}}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+0=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2dr=\frac{32}{9}$$

$$\therefore\ \iint\limits_{D}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma=\frac{16}{9}(3\pi-2)$$

解二：由积分区域对称性和被积函数的奇偶性可知



$$\iint\limits_{D}yd\sigma=0$$

$$\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=2\iint\limits_{D_{上}}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

原式=$2\left[\iint\limits_{D_{上1}}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+\iint\limits_{D_{上2}}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma\right]$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r^2dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_{-2\cos\theta}^2 r^2dr\right]$$

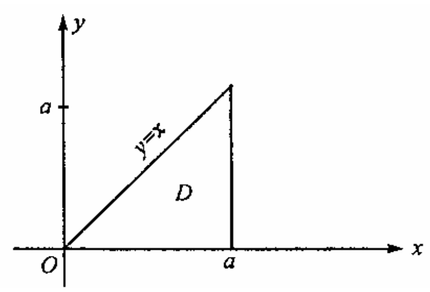
$$=2\left[\frac{4}{3}\pi+\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{16}{9}\right)\right]=\frac{16}{9}(3\pi-2)$$

二、交换积分的顺序

例 1．交换 $\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy$ 的积分顺序

例 2．设 $f'(y)$ 连续，证明

$$I=\int_0^a dx\int_0^x\frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy=\pi[f(a)-f(0)]$$



证明：交换积分次序

$$I=\int_0^a dy\int_y^a f'(y)\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a-y}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+y}{2}\right)^2}}$$

令 $x-\frac{a+y}{2}=\frac{a-y}{2}\sin t$，则 $dx=\frac{a-y}{2}\cos tdt$，

$$I=\int_0^a f'(y)dy\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{a-y}{2}\cos t}{\frac{a-y}{2}\cos t}dt=\pi\int_0^a f'(y)dy=\pi[f(a)-f(0)]$$

例 3．计算 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$

三、二重积分在几何上的应用

1．求空间物体的体积（数学一）

例 1．求两个底半径为 R 的正交圆柱面所围立体的体积

例 2．求球面 $x^2+y^2+z^2=4R^2$ 和圆柱面 $x^2+y^2=2Rx\quad(R>0)$ 所围（包含原点那一部分）的体积

2．求曲面的面积（数学一）

§7.2　三重积分（数学一）

（甲）内容要点

一、三重积分的计算方法

1．直角坐标系中三重积分化为累次积分

（1）设Ω是空间的有界闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z)|z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\quad (x,y)\in D\}$$

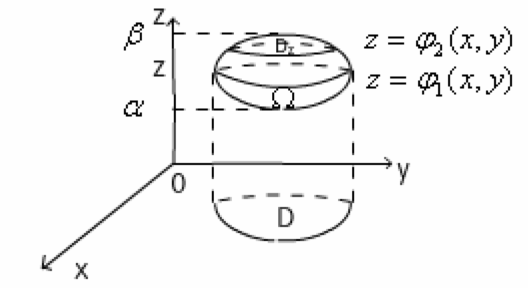
其中D是xy平面上的有界闭区域，$z_1(x,y),z_2(x,y)$在D上连续函数$f(x,y,z)$在Ω上连续，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint_{D}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

（2）设$\Omega=\{(x,y,z)|\alpha\le z\le\beta,(x,y)\in D(z)\}$

其中$D(z)$为竖坐标为z的平面上的有界闭区域，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{\alpha}^{\beta}dz\iint_{D(z)} f(x,y,z)dxdy$$



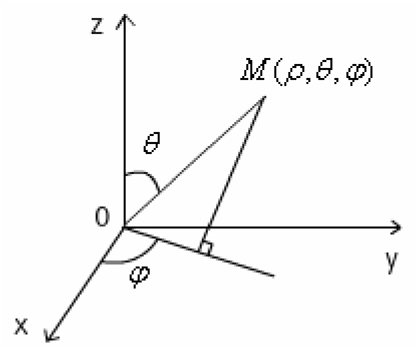
2．柱坐标系中三重积分的计算

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\Omega} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdrd\theta dz$$

相当于把(x,y)化为极坐标(r,θ)而z保持不变

3．球坐标系中三重积分的计算

$$\begin{cases}x=\rho\sin\theta\cos\varphi\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=\rho\cos\theta\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}\rho\ge 0\\ 0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{pmatrix}$$



$$\iiint_{D} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\Omega} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

（乙）典型例题

一、有关三重积分的计算

例 1．计算$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz$，其中$\Omega$由曲面$z=xy$，$y=x$，$x=1$，$z=0$所围的区域

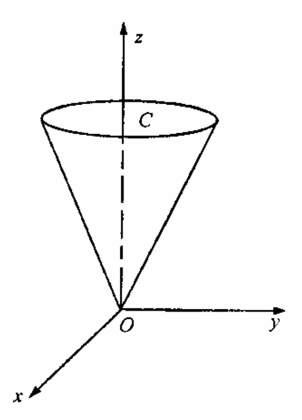
例 2．计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$，其中 Ω 由曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围的区域

例 3．计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$，其中 Ω 由曲面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围的区域

例 4．计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz$，其中 Ω 由曲面 $x^2+y^2=2z$，$z=2$ 所围的区域

二、在物理上的应用

例 1．求椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ 和平面 $z=c$ 围成物体的重心（设密度均匀恒为 1）



解：设重心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 物体所占空间区域为 Ω

由对称性可知 $\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega}dxdydz}$$

由锥体体积公式可知 $\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\frac{\pi abc}{3}$

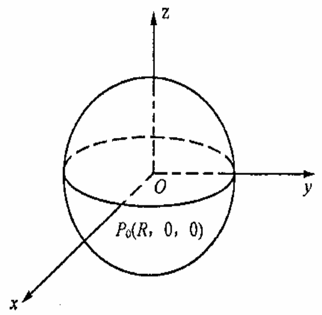
令 $x=ar\cos\theta$，$y=br\sin\theta$，$z=ct$

而 $\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=abc^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1 tdt$

$$=2\pi abc^2\int_0^1\frac{r(1-r^2)}{2}dr=\frac{\pi abc^2}{4}$$

因此，重心坐标 $\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$，$\bar{z}=\frac{3c}{4}$

例 2．设有一半径为 R 的球体，P_0 是球表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 的距离平方成正比（比例系数 $k>0$），求球体重心的位置



解一：设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，P_0 为 $(R,0,0)$，球体 Ω 的重心坐标为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ 由对称性可知 $\overline{y}=0$，$\overline{z}=0$

$$\overline{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\cdot k\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dv}{\iiint\limits_{\Omega} k\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dv}$$

由区域的对称性和函数的奇偶性，则有

$$-2R\iiint\limits_{\Omega} x dv=0$$

$$\iiint\limits_{\Omega} x\left[x^2+R^2+y^2+z^2\right]dv=0$$

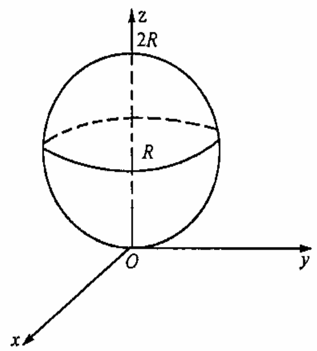
于是 $\iiint\limits_{\Omega}\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dv=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv+R^2\iiint\limits_{\Omega}dv$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R}\rho^4\sin\theta\, d\rho+R^2\cdot\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint\limits_{\Omega} x\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dv=-2R\iiint\limits_{\Omega}x^2dv$$

$$=-\frac{2R}{3}\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv=-\frac{8}{15}\pi R^6$$

因此 $\overline{x}=-\dfrac{R}{4}$，重心坐标为 $\left(-\dfrac{R}{4},0,0\right)$



解二：设球面坐标 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$，$P_0(0,0,0)$，重心坐标 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$

由对称性可知 $\overline{x}=0$，$\overline{y}=0$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\cdot k\left[x^2+y^2+z^2\right]dv}{\iiint\limits_{\Omega} k\left[x^2+y^2+z^2\right]dv}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\left[x^2+y^2+z^2\right]dv=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}\rho^5\cos\theta\sin\theta\,d\rho$$

$$=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\theta\sin\theta\,d\theta=\frac{8}{3}\pi R^6$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}\rho^4\sin\theta\,d\rho=\frac{32}{15}\pi R^5$$

于是$\bar{z}=\frac{5}{4}R$，重心坐标$\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$

§ 7.3　曲线积分（数学一）

（甲）内容要点

一、第一类 曲线积分（对弧长的曲线积分）

参数计算公式

我们只讨论空间情形（平面情形类似）

设空间曲线L的参数方程$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，$(\alpha\le t\le\beta)$

则 $\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$

（假设$f(x,y,z)$和$x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$皆连续）这样把曲线积分化为定积分来进行计算

二、第二类 曲线积分（对坐标的曲线积分）

参数计算公式

我们只讨论空间情形（平面情形类似）

设空间有向曲线L的参数方程$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，起点A对应参数为α，始点B对应参数为β（注意：现在α和β的大小不一定$\alpha<\beta$）如果$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$皆连续，又$x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$也都连续，则

$$\int_{L=\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt$$

这样把曲线积分化为定积分来计算。值得注意：如果曲线积分的定向相反，则第二类曲线积分的值差一个负号，而第一类曲线积分的值与定向无关，故曲线不考虑定向。

三、两类曲线积分之间的关系

空间情形：设$L=\overset{\frown}{AB}$为空间一条逐段光滑有定向的曲线，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在L上连续，

则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AB}} \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right]ds$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为曲线孤上AB上点(x,y,z)处沿定向A到B方向的切线的方向余弦。

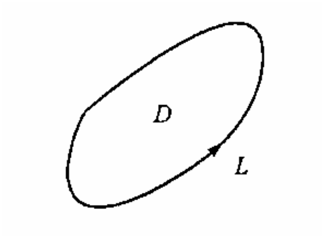
四、格林公式

关于平面区域上的二重积分和它的边界曲线上的曲线之间的关系有一个十分重要的定理，它的结论就是格林公式。

定理 1．（单连通区域情形）

设xy平面上有界闭区域D由一条逐段光滑闭曲线L所围的单连通区域，当沿L正定向移动时区域D在L的左边，函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在D上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$



五、平面上曲线积分与路径无关的几个等价条件

设$P(x,y)$，$Q(x,y)$在单连通区域D内有一阶连续偏导数，则下面几个条件彼此等价

1．任意曲线$L = AB$在D内$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dx$与路径无关

2．D内任意逐段光滑闭曲线C，都有$\oint_C p(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

3．$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$成立

4．D内处处有$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

（乙）典型例题

一、用参数公式直接计算

例．计算曲线积分

$$I = \oint_L (z-x)dx + (x-z)dy + (x-y)dz,$$

其中L是曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$，从$Z$轴正向往负向看$L$的方向是顺时针方向。

解：曲线L是圆柱面$x^2 + y^2 = 1$和平面$x - y + z = 2$的交线，是一个椭圆周，它的参数方程（不是唯一的

选法）最简单可取 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$z=2-x+y=2-\cos\theta+\sin\theta$，根据题意规定 L 的定向，则 θ 从 2π 变到 0，于是

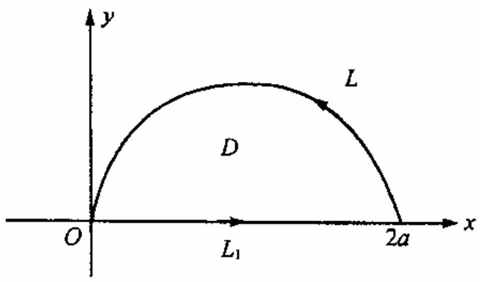
$$I=\int_{2\pi}^{0}\left[(2-\cos\theta)(-\sin\theta)+(-2+2\cos\theta-\sin\theta)\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)(\sin\theta+\cos\theta)\right]d\theta$$

$$=-\int_{2\pi}^{0}\left[2(\sin\theta+\cos\theta)-2\cos 2\theta-1\right]d\theta$$

$$=-2\pi$$

二、用格林公式等性质来计算曲线积分

例 1．求 $I=\int_L\left[e^x\sin y-b(x+y)\right]dx+\left[e^x\cos y-ax\right]dy$，其中 a，b 为正的常数，L 为从点 $(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $(0,0)$ 的弧



解一：用格林公式，但 L 不是封闭曲线，故补上一段 L_1，它为从 $(0,0)$ 沿 $y=0$ 到 $(2a,0)$ 的有向直线。这样 $L\cup L_1$ 构成封闭曲线，为逆时针方向

于是　$I=\int_{L\cup L_1}Pdx+Qdy-\int_{L_1}Pdx+Qdy=I_1-I_2$，

令 $\left[e^x\sin y-b(x+y)\right]=P$

$\left[e^x\cos y-ax\right]=Q$，根据格林公式

$$I_1=\int_{L\cup L_1}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_D(b-a)dxdy=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)$$

这里 D 为由 L 和 L_1 围成的上半圆区域。

另外，在 L_1 上，$y=0$，$dy=0$，故

$$I_2=\int_{L_1}Pdx+Qdy=\int_0^{2a}(-bx)dx=-2a^2b$$

于是 $I=I_1-I_2=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$

解二：我们把所给曲线积分拆成两项

$$I=\int_L e^x\sin y dx+e^x\cos y dy-\int_L b(x+y)dx+axdy=I_3-I_4$$

在 I_3 中，由于 $\frac{\partial}{\partial x}\left[e^x\cos y\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[e^x\sin y\right]$，故积分与路径无关

又看出 $d\left[e^x\sin y\right]=\left[e^x\sin y\right]dx+\left[e^x\cos y\right]dy$

因此 $I_3=e^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0$

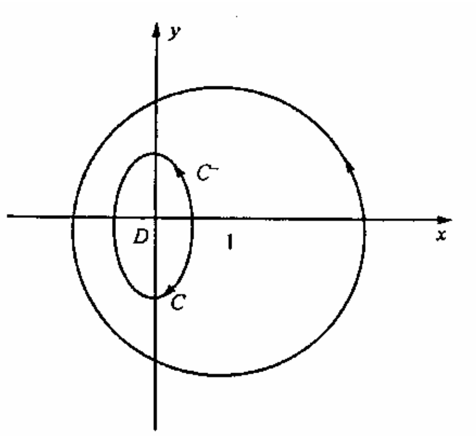
而在 I_4 中，取 L 的参数方程 $x=a+a\cos t$， $y=a\sin t$， t 从 0 到 π

于是 $I_4=\int_0^{\pi}\left(-a^2b\sin t-a^2b\sin t\cos t-a^2b\sin^2 t+a^3\cos t+a^3\cos^2 t\right)dt$

$$=\frac{\pi}{2}a^3-\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b$$

因此，$I=I_3-I_4=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$

例 2．计算曲线积分 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以 $(1,0)$ 为圆心，$R(>1)$ 为半径的圆周，取逆时针方向。



解：令 $P=\frac{-y}{4x^2+y^2}$， $Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 成立

因此，不能在 L 的内部区域用格林公式

设法用曲线 C 在 L 的内部又包含原点在 C 的内部，这样在 C 与 L 围成的二连通区域内可以用格林公式

今取曲线 C：$\begin{cases}x=\frac{\delta}{2}\cos\theta\\ y=\delta\sin\theta\end{cases}$ $\qquad\delta<(R-1)$

θ 从 2π 到 0 为顺时针方向

令 C 与 L 围成区域为 D（二连通区域）

根据格林公式

$$0=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_L Pdx+Qdy+\int_C Pdx+Qdy$$

（逆时针）　　　（顺时针）

于是 $I=\int_L Pdx+Qdy=-\int_C Pdx+Qdy=\int_{C^-} Pdx+Qdy$

（顺时针）　　　（逆时针）

用 C 的参数公式代入后，得

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}\delta^2}{\delta^2}d\theta=\pi$$

［注：这里取 C 为上述椭圆周，最后计算最简单，如果取 C 为 $x=\delta\cos\theta$，$y=\delta\sin\theta$ 的圆周，那么最后的积分就比较复杂 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\delta^2}{\delta^2\left[4\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]}d\theta$ ］

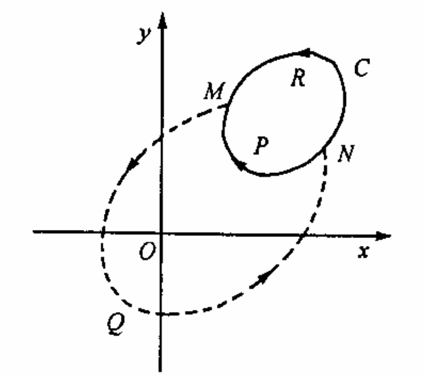
例 3. 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数。

（I）证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有

$$\oint_C\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0；$$

（II）求函数 $\varphi(y)$ 的表达式。

（I）证如图，



设 C 是半平面 $x>0$ 内的任一分段光滑简单闭曲线，在 C 上任意取定两点 M，N，作围绕原点的闭曲线 $\overset{\frown}{MQNRM}$，同时得到另一围绕原点的闭曲线 $\overset{\frown}{MQNPM}$。

根据题设可知

$$\oint_{\overset{\frown}{MQNRM}}\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}-\oint_{\overset{\frown}{MQNPM}}\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$$

$$=\oint_{MQNRM}\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}-\oint_{MQNPM}\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$$

根据第二类曲线积分得性质，利用上式可得

$$\oint_C \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$$

$$=\int_{\overset{\frown}{NRM}} \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}+\int_{\overset{\frown}{MPN}} \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$$

$$=\int_{\overset{\frown}{NRM}} \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}-\int_{\overset{\frown}{NPM}} \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$$

$$=\int_{MQNRM} \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}-\int_{MQNPM} \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$$

$$=0$$

（II）解：设 $P=\dfrac{\varphi(y)}{2x^2+y^4}$，$Q=\dfrac{2xy}{2x^2+y^4}$，$P,Q$ 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续偏导数。

由（I）知，曲线积分 $\int_L \dfrac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$ 在该区域与路径无关，故当 $x>0$ 时，总有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$。

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y\left(2x^2+y^4\right)-4x\cdot 2xy}{\left(2x^2+y^4\right)^2}=\frac{-4x^2y+2y^5}{\left(2x^2+y^4\right)^2}, \qquad ①$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\varphi'(y)\left(2x^2+y^4\right)-4\varphi(y)y^3}{\left(2x^2+y^4\right)^2}=\frac{2x^2\varphi'(y)+\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3}{\left(2x^2+y^4\right)^2}, \qquad ②$$

比较①、②两式的右端，得

$$\begin{cases}\varphi'(y)=-2y, & ③\\ \varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3=2y^5 & ④\end{cases}$$

由③得　$\varphi(y)=-y^2+c$，将 $\varphi(y)$ 代入④得　$2y^5-4cy^3=2y^5$，

所以 $c=0$，从而 $\varphi(y)=-y^2$

三、应用

例．在变力 $\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ 的作用下一质点由原点沿直线到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$ 问 ξ,η,ζ 取何值时，$\vec{F}$ 作功 W 最大，并求 $W_{\max}$。

解：设线段 OM 的参数方程 $x=\xi t$，$y=\eta t$，$z=\zeta t$，$(0\le t\le 1)$，则 $\vec{F}$ 在 OM 上作功

$$W=\int_{\overline{OM}}\vec{F}\cdot\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\right)=\int_{\overline{OM}}yzdx+zxdy+xydz$$

$$=\int_0^1 3\xi\eta\zeta\, t^2dt=\xi\eta\zeta$$

用拉格朗日乘子法求条件极值。构造函数

$$G(\xi,\eta,\zeta,\lambda)=\xi\eta\zeta+\lambda\left(1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}\right)$$

$$G'_\xi = \eta\zeta - \frac{2\lambda}{a^2}\xi = 0 \qquad (1)$$

$$G'_\eta = \xi\zeta - \frac{2\lambda}{b^2}\eta = 0 \qquad (2)$$

$$G'_\zeta = \xi\eta - \frac{2\lambda}{c^2}\zeta = 0 \qquad (3)$$

$$G'_\lambda = 1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0 \qquad (4)$$

$\xi \times (1) + \eta \times (2) + \zeta \times (3)$ 得 $3\xi\eta\zeta + 2\lambda(-1) = 0$　　（5）

由（1）得 $\eta\zeta = \frac{2\lambda}{a^2}\xi$ 代入（5）得 $\xi^2 = \frac{a^2}{3}$，则 $\xi = \frac{\sqrt{3}}{3}a$，

同理得 $\eta = \frac{\sqrt{3}}{3}b$，$\zeta = \frac{\sqrt{3}}{3}c$，

$$W_{\max} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 abc = \frac{\sqrt{3}}{9}abc$$

故原点到 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{\sqrt{3}}{3}b, \frac{\sqrt{3}}{3}c\right)$ 作功最大，最大功为 $\frac{\sqrt{3}}{9}abc$

§7.4　曲面积分　（数学一）

（甲）内容要点

一、第一类曲面积分（对面积的曲面积分）

基本计算公式

设曲面 S 的方程 $z = z(x, y)$，$(x, y) \in D$

$z(x, y)$ 在 D 上有连续偏导数，$f(x, y, z)$ 在 S 上连续，则

$$\iint_S f(x, y, z)ds = \iint_D f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

这样把第一类曲面积分化为二重积分进行计算

二、第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）

基本计算公式

$$\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$$

如果曲面 S 的方程 $z = z(x, y)$，$(x, y) \in D_{xy}$

$Z(x, y)$ 在 D_{xy} 上连续，$R(x, y, z)$ 在 S 上连续，则

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

若曲面 S 指定一侧的法向量与 Z 轴正向成锐角取正号，成钝角取负号，这样把这部分曲面积分化为 xy 平面上的二重积分，其它两部分类似地处理。

三、两类曲面积分之间的关系

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos y]dS$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为曲面 S 在点 (x,y,z) 处根据定向指定一侧的法向量的三个方向余弦

令 $\vec{F} = \{P,Q,R\}$，$\overrightarrow{n_0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S \vec{F} \bullet \vec{n}_0 ds$$

四、高斯公式

定理　设 Ω 是由分块光滑曲面 S 围成的单连通有界闭区域，$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \iint_{\substack{S\\(\text{外侧})}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \iint_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]dS$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 S 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦

五、斯托克斯公式

定理：设 L 是逐段光滑有向闭曲线，S 是以 L 为边界的分块光滑有向曲面，L 的正向与 S 的侧（取法向量的指向）符合右手法则，函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在包含 S 的一个空间区域内有连续的一阶偏导数，则有

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

也可用第一类曲面积分

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

六、梯度、散度和旋度

1．梯度　设 $u=u(x,y,z)$，则 $gradu=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$

称为 u 的梯度，令 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ 是算子

则 $gradu=\nabla u$

2．散度　设 $\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

则

$$divF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot F$$

称为 $\vec{F}$ 的散度

高斯公式可写成 $\iiint\limits_{\Omega}divFdv=\iint\limits_{S}F\cdot n_0dS$

（外侧）

其中 $\overrightarrow{n_0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为外侧单位法向量

3、旋度

设 $\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

$$rot\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

称为 $\vec{F}$ 的旋度。

斯托克斯公式可写成 $\oint_L F\cdot d\vec{r}=\iint\limits_{S}(rotF)\cdot n_0dS$

其中 $d\vec{r}=(dx,dy,dz)$，$\overrightarrow{n_0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

（乙）典型例题

一、用基本公式直接计算曲面积分

例 1. 设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，π 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为原点到 π 的距离，求 $\iint\limits_{S}\frac{z}{\rho(x,y,z)}ds$

解：

先求出 $\rho(x,y,z)$，设 (X,Y,Z) 为 π 上任一点，则 π 的方程为

$$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$$

即 $\frac{x}{2}X+\frac{y}{2}Y+zZ-1=0$

$$\rho(x,y,z)=\frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+z^2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

由 S 的方程 $z=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}$，于是

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}d\sigma$$

这样 $\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\frac{1}{4}\iint\limits_D\left(4-x^2-y^2\right)d\sigma$

区域 $D: x^2+y^2\le\left(\sqrt{2}\right)^2$

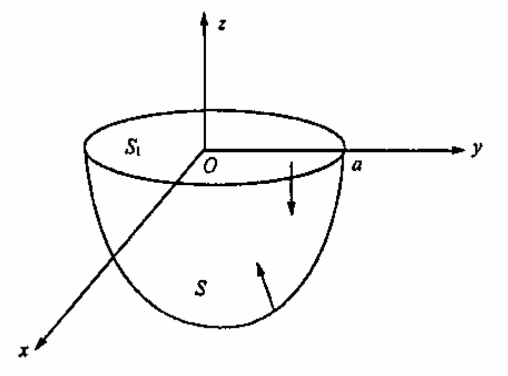
所以

原式 $=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(4-r^2\right)rdr=\frac{3}{2}\pi$

二、用高斯公式计算曲面积分

例 1．计算 $I=\iint\limits_S\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ （$a>0$ 常数）

其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上侧（$a>0$）



解：

令曲面 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$ 下侧

于是 $S_1\bigcup S$ 为闭下半球面的内侧

设其内部区域为Ω，令D为xy平面上圆域$x^2+y^2\le a^2$

则$I=\dfrac{1}{a}\iint\limits_S\left[axdydz+(z+a)^2dxdy\right]=\dfrac{1}{a}\left[\iint\limits_{SUS_1}-\iint\limits_{S_1}\right]$

$$=\frac{1}{a}\left[-\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)dv+\iint\limits_D a^2dxdy\right]=\frac{1}{a}\left[-2\pi a^4-2\iiint\limits_{\Omega}zdv+\pi a^4\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[-\pi a^4-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 zdz\right]=-\frac{\pi}{2}a^3$$

例 2. 计算$I=\iint\limits_S\dfrac{(x-1)dydz+(y-1)dzdx+(z-1)dxdy}{\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]^{3/2}}$其中$S$是不通过点$(1,1,1)$的球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧

解：

设$I=\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$通过计算可知$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$

（1）当S的内部不包含点$(1,1,1)$时，根据高斯公式可知$I=0$

（2）当S的内部包含点$(1,1,1)$时，作曲面

$S_1:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=a^2$ 内侧

选a充分大，使S在S_1的内部，于是S和S_1是二连通区域Ω的边界曲面，现在

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=0$$

根据高斯公式（二连通区域）

$$\iint\limits_{\substack{S\\(\text{外侧})}}+\iint\limits_{\substack{S_1\\(\text{内侧})}}=0$$

于是$I=\iint\limits_{\substack{S\\(\text{外侧})}}=-\iint\limits_{\substack{S_1\\(\text{内侧})}}=\iint\limits_{\substack{S_1^-\\(\text{外侧})}}$

在S_1^-（外侧）上$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=a^2$，故积分可以化简

$$I=\iint\limits_{\substack{S_1^-\\(\text{外侧})}}\frac{(x-1)dydz+(y-1)dzdx+(z-1)dxdy}{a^3}$$

令Ω是以S_1^-（外侧）为边界的空间区域$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le a^2$再用高斯公式

$$I=\frac{1}{a^3}\iiint\limits_{\Omega_1}3dv=\frac{3}{a^3}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi$$

例 3．设对$x>0$内任意光滑有向闭曲面S都有

$$\oiint\limits_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0$$

其中 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有一阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，求 $f(x)$

解：

设 Ω 为由曲面 S 包围的空间区域，由题设和高斯公式得

$$\pm\iiint_{\Omega}\left[xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}\right]dv=0$$

由于 S 的任意性，可知 $x>0$ 时 $xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0$

即微分方程：$f'(x)+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)f(x)=\dfrac{1}{x}e^{2x}\ (x>0)$

得出通解 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}\left(e^x+c\right)$

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{2x}+ce^x}{x}=1$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{2x}+ce^x\right)=0$

得 $c+1=0$，$c=-1$

则 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}\left(e^x-1\right)$

三、用斯托克斯公式

例 1．设 $\vec{F}=2y\vec{i}+3x\vec{j}-z^2\vec{k}$，曲面 S 为 $x^2+y^2+z^2=9$ 的上半部，求 $I=\iint_S rot\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}ds$

解：根据斯托克斯公式 $I=\oint_L\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_L 2ydx+3xdy-z^2dz$，其中 L 为 S 的边界曲线

$\begin{cases}x^2+y^2=9\\ z=0\end{cases}$ （逆时针方向）

取 L 的参数方程 $x=3\cos\theta$，$y=3\sin\theta$，$z=0$，θ 由 0 到 2π

则 $I=2\int_0^{2\pi}\left(-9\sin^2\theta\right)d\theta+3\int_0^{2\pi}\left(-9\cos^2\theta\right)d\theta=-18\pi+27\pi=9\pi$

例 2. 计算 $I=\oint_L\left(y^2-z^2\right)dx+\left(2z^2-x^2\right)dy+\left(3x^2-y^2\right)dz$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正线看去，L 为逆时针方向。

解：记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧，D 为 S 在 xy 坐标平面上的投影，由斯托克斯公式得

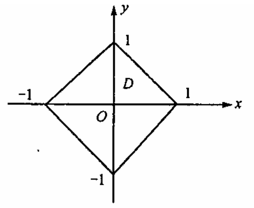
$$I=\iint_S(-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-2y)dxdy$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)ds$$

$$=-2\iint_D(x-y+6)dxdy$$

$$=-12\iint_D dxdy=-24$$

$$\left(ds=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=\sqrt{3}dxdy\right)$$



四、曲面积分的应用

例．设有一高度为 $h(t)$（t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$（设长度单位为厘米，时间单位为小时），已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9），问高度为 130（厘米）的雪堆全部融化需多少时间？

解：记 V 为雪堆体积，S 为雪堆的侧面积，则

$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]}dxdy$$

$$=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi\left[h^2(t)-h(t)z\right]dz$$

$$=\frac{\pi}{4}h^3(t),$$

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,dxdy$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left[h^2(t)+16r^2\right]^{\frac{1}{2}}rdr$$

$$=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

由题意知 $\frac{dV}{dt}=-0.9S$，所以 $\frac{dh(t)}{dt}=-\frac{13}{10}$，因此 $h(t)=-\frac{13}{10}t+C$。

由 $h(0)=130$，得 $h(t)=-\frac{13}{10}t+130$。令 $h(t)=0$，得 $t=100$（小时）。

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需时间为 100 小时。

五、梯度、散度和旋度

例 1．设 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，$r=|\vec{r}|$，求 $f(r)$ 使 $div[gradf(r)]=0$

解：$gradf(r)=f'(r)\left[\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}\right]$，

$$div[gradf(r)]=f''(r)+f'(r)\frac{2}{r}=0,$$

求出微分方程的通解 $f(r)=C_1+\frac{C_2}{r}$，其中 C_1，C_2 为任意常数

例 2．设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，计算

（1） $gradu$　　（2） $div(gradu)$　　（3） $rot(gradu)$

解：（1） $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$，

则 $gradu=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)$；

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

（2） $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}-\frac{2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

$$div(gradu)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

于是 $=\frac{3}{x^2+y^2+z^2}-\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$。

（3） $rot(gradu)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}$

第八章　无穷级数（数学一和数学三）

引言：所谓无穷级数就是无穷多项相加，它与有限项相加有本质不同，历史上曾经对一个无穷级数问题引起争论。例如：

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$$

历史上曾有三种不同看法，得出三种不同的“和”

第一种　$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0$

第二种　$1-(1-1)-(1-1)\cdots-(1-1)-\cdots=1$

第三种　设 $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots=S$

则$1-\left[1-1+1-1+\cdots\right]=S$

$1-S=S$， $2S=1$， $S=\dfrac{1}{2}$

这种争论说明对无穷多项相加，缺乏一种正确的认识。

1）什么是无穷多项相加？如何考虑？

2）无穷多项相加，是否一定有“和”？

3）无穷多项相加，什么情形有结合律，什么情形有交换律等性质。因此对无穷级数的基本概念和性质需要作详细的讨论。

§8.1 常数项级数

（甲）内容要点

一、基本概念与性质

1．基本概念

无穷多个数$u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$依次相加所得到的表达式

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$称为数项级数（简称级数）。

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$称为级数的前$n$项的部分和，$\{S_n\}(n=1,2,3,\cdots)$称为部分和数列。

若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$（存在）$=S$，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是收敛的，且其和为$S$，记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S$

若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是发散的，发散级数没有和的概念。（注：在某些特殊含义下可以考虑发散级数的和，但在基础课和考研的考试大纲中不作这种要求。）

口诀（46）：无穷级数不神秘，部分和后求极限。

2．基本性质

（1）如果

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$皆收敛，$a,b$为常数，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)$收敛，且等于$a\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+b\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$

（2）在级数中增加或减少或变更有限项则级数的收敛性不变。

（3）收敛级数具有结合律，也即对级数的项任意加括号所得到的新级数仍收敛，而且其和不变。发散级数不具有结合律，引言中的级数可见是发散的，所以不同加括号后得到级数的情形就不同。

（4）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

（注：引言中提到的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$，具有$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$不存在，因此收敛级数的必要条件不满足，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$

发散。调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$满足$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$却是发散的，所以满足收敛级数的必要条件$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛性尚不能确定。）

3．两类重要的级数

（1）等比级数（几何级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty}ar^n \quad (a\neq 0)$$

当$|r|<1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\frac{a}{1-r}$收敛

当$|r|\geq 1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}ar^n$发散

（2）p一级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

当$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，当$p\leq 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散

（注：$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的和一般不作要求，但后面用特殊的方法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$）

二、正项级数敛散性的判别法

若$u_n\geq 0(n=1,2,3,\cdots)$则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$称为正项级数，这时$S_{n+1}\geq S_n(n=1,2,3,\cdots)$所以$\{S_n\}$是单调增加数列，它是否收敛就只取决于$S_n$是否有上界，因此$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛$\Leftrightarrow S_n$有上界，这是正项级数比较判别法的基础，从而也是正项级数其它判别法的基础。

1．比较判别法

设$c>0$，当$n\geq N$时，$cv_n\geq u_n>0$皆成立，如果$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散。

2．比较判别法的极限形式

设$u_n\geq 0$，$v_n\geq 0$，$(n=1,2,3,\cdots)$　若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$

1）当$0<A<+\infty$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$同时收敛或同时发散。

2）当$A=0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

3）当 $A=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛。

3．比值判别法（达朗倍尔）

设 $u_n>0$，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

1）当 $\rho<1$ 时，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

2）当 $\rho>1$ 时（包括 $\rho=+\infty$），则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

3）当 $\rho=1$ 时，此判别法无效（注：如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在时，此判别法也无法用）

4．根值判别法（柯西）

设 $u_n\ge 0$，而 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

1）当 $\rho<1$ 时，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

2）当 $\rho>1$ 时（包括 $\rho=+\infty$），则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

3）当 $\rho=1$ 时，此判别法无效

事实上，比值判别法和根值判别法都是与等比级数比较得出相应的结论，应用时，根据所给级数的形状有不同的选择，但它们在 $\rho=1$ 情形下都无能为力。数学上有更精细一些的判别法，但较复杂，对考研来说不作要求。

三、交错级数及其莱布尼兹判别法

1．交错级数概念

若 $u_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 称为交错级数。

2．莱布尼兹判别法

设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足：

1）$u_{n+1}\le u_n\ (n=1,2,3,\cdots)$

2）$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛，且 $0<\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n<u_1$

四、绝对收敛与条件收敛

1．定理

若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛；反之不然。

2．定义

若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为绝对收敛；

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为条件收敛。

3．有关性质

1）绝对收敛级数具有交换律，也即级数中无穷多项任意交换顺序，得到级数仍是绝对收敛，且其和不变。

2）条件收敛级数的正项或负项构成的级数，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)$或$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(u_n-|u_n|)$一定是发散的。

4．一类重要的级数

设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\rho}}$

1）当$\rho>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\rho}}$是绝对收敛的

2）当$0<\rho\le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\rho}}$是条件收敛的

3）当$\rho\le 0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\rho}}$是发散的

（乙）典型例题

一、主要用部分和数列的极限讨论级数的敛散性

例 1．判定下列级数敛散性，若收敛并求级数的和。

1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$

2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$

1）解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$的

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k(k+1)}\left[\left(\sqrt{k+1}\right)^2-\left(\sqrt{k}\right)^2\right]}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\because \lim_{n\to\infty} S_n=1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=1\text{，收敛}$$

[注] 如果只判别收敛性不需要求和，那么可以用比较判别法的极限形式

因为 $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}\sim\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ (当$n\to\infty$)

而 $p=\dfrac{3}{2}>1$,可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，从而原级数收敛

2）解：$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$ ①

$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^n}+\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$ ②

①-②得 $\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+2\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$

$$=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$$

$$\because \lim_{n\to\infty} S_n=3$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3\text{，收敛}$$

例 2．设数列$\{na_n\}$收敛，级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$收敛，证明$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛

证：由题意可知$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=A$存在

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k-1})=S$ 存在

而 $S_n=(a_1-a_0)+2(a_2-a_1)+3(a_3-a_2)+\cdots+n(a_n-a_{n-1})$

$$=na_n-\sum_{k=0}^{n-1}a_k$$

因此，$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = na_n - S_n$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \lim_{n\to\infty} na_n - \lim_{n\to\infty} S_n = A - S$$

于是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A - S$ 是收敛的

二、主要用判别法讨论级数的敛散性

例 1．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geq 0)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛

解：

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sqrt{\frac{a_n}{n^2}} \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right) \quad (\text{几何平均值} \leq \text{算术平均值})$$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$ 收敛

再用比较判别法，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛

例 2．正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散，问 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由。

解：

$\because a_n \geq 0$，又单调减少，

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在，如果 $a = 0$，根据莱布尼兹判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛，与假设矛盾，

$\therefore a > 0$，
这样，

$$\frac{1}{a_n + 1} \leq \frac{1}{a + 1} < 1, \quad \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n \leq \left(\frac{1}{a + 1}\right)^n$$

由等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a + 1}\right)^n$ 收敛和比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n$ 收敛。

例 3．设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$

（1）求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n}$ 的值。

（2）证明：对任意正常数 $\lambda > 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

证明：

（1）$\frac{a_n + a_{n+2}}{n} = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{x}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)dx$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{\frac{x}{4}} \tan^n x d\tan x = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + a_{n+2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$$

（2）$a_n = \int_0^{\frac{x}{4}} \tan^n x dx = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$

$$< \int_0^1 t^n dt \le \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{a_n}{n^{\lambda}} < \frac{1}{n^{\lambda}(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}$$

$\because \lambda + 1 > 1$，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

例 4．设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$，其中 n 正整数，证明方程有唯一正实根 x_n，并证明当 $\alpha > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛。

证：记 $f_n(x) = x^n + nx - 1$

当 $x > 0$ 时，$f_n'(x) = nx^{\alpha-1} + n > 0$

故 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加。

而 $f_n(0) = -1 < 0$，$f_n(1) = n > 0$，由连续函数的介值定理知

$x^n + nx - 1 = 0$ 存在唯一正实根 x_n

由 $x_n^n + nx_n - 1 = 0$ 与 $x_n > 0$ 知

$$0 < x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} < \frac{1}{n},$$

故当 $\alpha > 1$ 时，$0 < x_n^{\alpha} < \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ 收敛，

所以当 $\alpha > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛。

§ 8.2　幂级数

（甲）内容要点

一、函数项级数及其收敛域与和函数（数学一）

1．函数项级数的概念

设$u_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$皆定义在区间I上，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$称为区间$I$上的函数项级数。

2．收敛域

设$x_0\in I$，如果常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛，则称$x_0$是函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点，如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$发散，则称$x_0$是$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的发散点。函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的所有收敛点构成的集合就称为收敛域。所有发散点构成的集合称为发散域。

3．和函数

在$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域的每一点都有和，它与$x$有关，因此$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，$x\in$收敛域称$S(x)$为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和函数，它的定义域就是函数项级数的收敛域。

二、幂级数及其收敛域

1．幂级数概念

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$称为$(x-x_0)$的幂级数，$a_n(n=0,1,2,\cdots)$称为幂级数的系数，是常数，当$x_0=0$时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$称为$x$的幂级数。一般讨论$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$有关问题，作平移替换就可以得出有关$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的有关结论。

2．幂级数的收敛域

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域分三种情形：

（1）收敛域为$(-\infty,+\infty)$，亦即$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$对每一个$x$皆收敛，我们称它的收敛半径$R=+\infty$

（2）收敛域仅为原点，除原点外幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$皆发散，我们称它的收敛半径$R=0$。

（3）收敛域为

$(-R,R)$或$(-R,R]$或$[-R,R)$或$[-R,R]$中的一种，我们称它的收敛半径为R

$(0<R<+\infty)$

所以求幂级数的收敛半径 R 非常重要，（1）（2）两种情形的收敛域就确定的。而（3）的情形，还需讨论 $\pm R$ 两点上的敛散性。

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$（包括 $+\infty$）或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$（包括 $+\infty$），则收敛半径 $R = \dfrac{1}{l}$（若 $l = +\infty$，则 $R = 0$，若 $l = 0$ 则 $R = +\infty$），如果上述两极限不成立，那么就要用其它方法求收敛半径，后面有所讨论。

三、幂级数的性质

1．四则运算

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$，$|x| < R_1$；$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$，$|x| < R_2$

则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = f(x) \pm g(x)$，$|x| < \min(R_1, R_2)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0) x^n = f(x) \cdot g(x)$$

$|x| < \min(R_1, R_2)$

2．分析性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$，$S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为和函数，则有下列重要性质。

（1）$S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可导，且有逐项求导公式

$S'(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 求导后幂级数的收敛半径不变，因此得出

$S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内有任意阶导数，公式为

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k}, \quad |x| < R \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

（2）$S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内有逐项积分公式

$\int_0^x S(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 且这个幂级数的收敛半径也不变。

（3）若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ 在 $x = R(-R)$ 成立，则有下列性质：

（i）$\lim\limits_{x\to R^-} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 成立（$\lim\limits_{x\to(-R)^+} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ 成立）

（ii）$\int_0^R S(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 成立（$\int_{-R}^0 S(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{-a_n}{n+1} (-R)^{n+1}$ 成立）

（iii）$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 在 $x = R(-R)$ 不一定收敛

也即 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = S'_-(R)$　不一定成立。　$(S'_+(-R))$

如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R(-R)$ 发散，那么逐项求导后的级数

$\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 在 $x = R(-R)$ 一定发散，而逐项积分后的级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 在 $x = R(-R)$ 有可能收敛。

四、幂级数求和函数的基本方法

1．把已知函数的幂级数展开式（§8.3 将讨论）反过来用。

下列基本公式应熟背：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$　　$|x| < 1$

（2）$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$　　$|x| < +\infty$

（3）$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$，　$|x| < +\infty$

（4）$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$，　$|x| < +\infty$

（5）$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$，　$(-1 < x \le 1)$

（6）$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha$，　$-1 < x < 1$　（α 为实常数）

2．用逐项求导和逐项积分方法以及等比级数求和公式

例：求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数

解：$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = (\sum_{n=1}^{\infty} x^n)' = (\frac{x}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$

3．用逐项求导和逐项积分方法化为和函数的微分方程从而求出微分方程的解。

五、利用幂级数求和函数得出有关常数项级数的和

（乙）典型例题

例 1．求下列幂级数的和函数。

（1） $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$

（2） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$

解：

（1）可求出收敛半径 $R=1$，收敛域为 $(-1,1)$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=2x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt\right]'+\frac{1}{1-x}$$

$$=2x\left[\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right]'+\frac{1}{1-x}=2x\left[\frac{x}{1-x}\right]'+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}\qquad x\in(-1,1)$$

（2）可以从求出和函数后，看出其收敛域

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(n+1)-2]^2}{n+1}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$$

令 $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$， $S_2(x)=4\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{4}{1-x}\qquad |x|<1$，

$$S_3(x)=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$$

$$\int_0^x S_1(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}\qquad |x|<1$$

$$\therefore S_1(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}\qquad |x|<1$$

$$xS_3(x)=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n}$$

$$=-4\ln(1-x)\qquad(-1\le x<1)$$

这里用到公式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}=\ln(1+t)\qquad(-1<t\le 1)$

于是 $S(x)=S_1(x)-S_2(x)+S_3(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{4}{x}\ln(1-x)$

$=\dfrac{4x-3}{(1-x)^2}-\dfrac{4}{x}\ln(1-x) \quad x\in(-1,1)$ 且 $x\neq 0$

从上面运算也看先要假设 $x\neq 0$，但 $S(0)=a_0=1$，

又 $\lim\limits_{x\to 0}S(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{4x-3}{(1-x)^2}-4\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right]$

$=(-3)-4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{-1}{1-x}\right)}{1}=1$，说明 $S(x)$ 在 $x=0$ 处不但有定义而且是连续的，这正是幂级数的和函数应具备的性质。

因此，$S(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \dfrac{4x-3}{(1-x)^2}-\dfrac{4}{x}\ln(1-x) & |x|<1,\text{且}x\neq 0\end{cases}$

例 2．已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$，（$n$ 为正整数），且 $f_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和。

例 3．设级数 $\dfrac{x^4}{2\cdot 4}+\dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 的和函数为 $S(x)$，求：

（1）$S(x)$ 所满足的一阶微分方程

（2）$S(x)$ 的表达式

例 4．求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和

§ 8.3 将函数展开成幂级数

（甲）内容要点

一、泰勒级数与麦克劳林级数的概念

1．基本概念

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内具有任意阶导数，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数。（注：这里泰勒级数是否收敛？是否收敛于 $f(x)$ 都不知道），特别地，当 $x_0=0$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为 $f(x)$ 的麦克劳林级数

2．函数展成幂级数的条件

设 $f(x)$ 在 $|x-x_0|<R$ 内有任意阶导数，它的泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)$ 为 n 阶余项，它的拉格朗日型为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

则 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$　　$|x-x_0|<R$ 的充要条件为 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$，

$|x-x_0|<R$ 而且 $f(x)$ 在 x_0 处幂级数展开式是唯一的。

特别地，$x_0=0$ 时得到函数展成麦克劳林级数的充分必要条件。

二、函数展成幂级数的方法

1．套公式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\text{，}\quad |x-x_0|<R$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

例 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$，$|x|<+\infty$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\text{，}\quad |x|<+\infty$$

$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$，$|x|<1$，（$\alpha$ 为实常数）

2．逐项求导

例． $\cos x=(\sin x)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，$|x|<+\infty$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\text{，}\quad |x|<1$$

3．变量替换法

例． $e^{x^2}=e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}$，$|x|<+\infty$

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}\text{，}\quad |x|<1$$

4．逐项积分法

例．$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (-1<x\le 1)$$

由此可得 $\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

$$\arctan x=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

由此可得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

5．其它方法

例 1：把 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ 展成 x 的幂级数

分析：如果用套公式法那么很烦，有人求出 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$，没有求出一般项 a_nx^n，就不行！应该这样做：$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-(\frac{x}{2})}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[1-(\frac{1}{2})^{n+1}]x^n$$

例 2：$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ 把 $\cos 2x$ 用变量替换法展开，代入化简即可。上面都是把函数展成 x 的幂级数（麦克劳林级数）如果要展成 $(x-x_0)$ 的幂级数（泰勒级数），一般经过适当处理后可利用麦克劳林级数的结果，后面典型例题中再讨论。

（乙）典型例题

例 1．将 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展成 x 的幂级数，并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和

解：$\because\ f'(x)=\frac{-2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n} \qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

$\therefore\ f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt$

$$=\frac{\pi}{4}-2\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n t^{2n} dt$$

$$=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$\because \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处连续

$$\therefore f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

将 $x=\frac{1}{2}$ 代入， $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\right]$

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，故得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

例 2．求 $f(x)=\ln x$ 在 $x=1$ 处的泰勒级数

解：$\ln x=\ln[1+(x-1)]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\qquad (0<x\le 2)$

例 3．求 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x=1$ 处的泰勒级数

解：
$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+(x-1)}-\frac{1}{3+(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{3}\right)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right](x-1)^n\qquad (-1<x<3)$$

例 4．求 $f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e}{x-1}\right)$ 在 $x=1$ 外的泰勒级数

解：$e^x=e^{x-1}\cdot e=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}\qquad (-\infty<x<+\infty)$

$$\frac{e^x-e}{x-1}=e\left[1+\frac{(x-1)}{2!}+\frac{(x-1)^2}{3!}+\cdots+\frac{(x-1)^{n-1}}{n!}+\cdots\right]$$

（这里补充定义 $x=1$ 时函数值为 e）

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e}{x-1}\right)=e\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}(x-1)+\cdots+\frac{(n-1)}{n!}(x-1)^{n-2}+\cdots\right]$$

（这里补充定义 $f(1)=\frac{e}{2!}$）

例 5．求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的泰勒级数

解：$\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\cdots\right]\quad(-\infty<x<+\infty)$$

§8.4　傅里叶级数（数学一）

（甲）内容要点

一、三角函数系的正交性

定义在$[-l,l]\ (l>0)$上的三角函数系

$$1,\cos\frac{\pi}{l}x,\sin\frac{\pi}{l}x,\cos\frac{2\pi}{l}x,\sin\frac{2\pi}{l}x,\cdots,\cos\frac{n\pi}{l}x,\sin\frac{n\pi}{l}x,\cdots$$

看作实数域上的线性空间，再定义内积

$(f,g)=\int_{-l}^{l}f(x)g(x)dx$ 则任意两个元素的内积皆为 0，也即有

$$\int_{-l}^{l}1\cdot\cos\frac{n\pi}{l}dx=\int_{-l}^{l}1\cdot\sin\frac{n\pi}{l}xdx=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}xdx=0,\quad(m,n=1,2,\cdots)$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx=0\quad(m,n=1,2,\cdots,\text{且}m\neq n)$$

故称这个三角函数系是正交的。

二、傅里叶系数与傅里叶级数

设 $f(x)$ 以 $2l(l>0)$ 为周期或只定义在$[-l,l]$上的可积函数，

令 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$，$n=0,1,2,\cdots$

　$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$，$n=0,1,2,\cdots$

则称 a_n,b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数。

三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$

称为 $f(x)$ 的傅里叶级数（关于周期为 $2l$，或只在$[-l,l]$）

记以 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$

值得注意在现在假设条件下有 $f(x)$ 傅里叶系数和傅里叶级数的相关概念，但并不知道傅里叶级数是否收敛，更不知道傅里叶级数是否收敛于 $f(x)$

三、狄利克雷收敛定理

设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上定义，且满足

（1） $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续或只有有限个第一类间断点

（2） $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上只有有限个极值点

则 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=S(x)$ 收敛，且

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & 当x\in(-l,l)为f(x)的连续点 \\ \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right], & 当x\in(-l,l)为f(x)的第一类间断点 \\ \frac{1}{2}\left[f(-l+0)+f(l-0)\right], & 当x=\pm l \end{cases}$$

我们把上述两个条件称为狄利克雷条件

四、正弦级数与余弦级数

1．设 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期或在 $[-l,l]$ 上定义，且满足狄利克雷条件。

（1）如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$

而 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\quad(n=1,2,\cdots)$

这时 $f(x)$ 的傅里叶级数为正弦级数

（2）如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$

而 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\quad(n=0,1,2,\cdots)$

这时 $f(x)$ 的傅里叶级数为余弦级数。

2．设 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上定义，且在 $[0,l]$ 上连续或只有有限个第一类间断点，只有有限个极值点，那么 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上可以有下列两个傅里叶展开式

（1） $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}$

其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\quad(n=0,1,2,\cdots)$

（2） $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$，$(n=1,2,3,\cdots)$

其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$

因为在（1）中，相当于 $f(x)$ 从 $[0,l]$ 按偶函数扩充定义到 $[-l,0)$；在（2）中，相当于 $f(x)$ 从 $[0,l]$ 按奇函数扩充定义到 $[-l,0)$，得出傅里叶级数只在 $[0,l]$ 上，因此为余弦级数或正弦级数都可以。至于这些级数收敛的和函数仍按狄利克雷收敛定理的结论。

（乙）典型例题

例 1．把 $f(x)=10-x$，$5\le x\le 15$ 展成以 10 为周期的傅里叶级数

例 2．将函数 $f(x)=2+|x|\qquad(-1\le x\le 1)$ 展成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和。

例 3．设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，a_n,b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数，试证：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$